В.И.Благодатских

ВВЕДЕНИЕ В ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

• линейная теория •

Допущено
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника
для студентов высших
учебных заведений

Москва
«Высшая школа» 2001

УДК 510
ББК 22.1
Б 68

Рецензенты:

кафедра высшей математики МФТИ (заведующий кафедрой – д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАО, проф. Г.Н. Яковлев) и д-р физ.-мат. наук, проф. М.С. Никольский

Благодатских В.И.

Б 68 Введение в оптимальное управление (линейная теория): Учебник/В.И. Благодатских. Под ред. В.А. Садовничего. – М.: Высш. шк., 2001. – 239 с.: ил.

ISBN 5-06-003983-8

Книга состоит из 12 лекций, в которых изложен необходимый математический аппарат (элементы выпуклого анализа, теория опорных фуикций, сведения из теории многозначных отображений) и подробно рассмотреиа линейная задача быстродействия. В дополнениях приведены доказательства наиболее технически сложных результатов.

Для студентов высших учебных заведений, а также аспирантов и научных работников, использующих в своей деятельности математическую теорию оптимального управления.

УДК 510
ББК 22.1

ISBN 5-06-003983-8

ОБ АВТОРЕ

Виктор Иванович Благодатских родился 18 мая 1946 г. в удмуртском селе Сюмси в большой семье, где было девять детей. В школьные годы он был очень увлекающимся мальчишкой: занимался во всех школьных кружках, и без него не проходила, пожалуй, ни одна республиканская олимпиада по математике, химии, физике. И практически всегда он становился победителем. Именно таким образом в 1963 г. он попал в Колмогоровскую летнюю математическую школу под Москвой. Это и решило его дальнейшую судьбу. После окончания средней школы он поступил на механико-математический факультет Московского государственного университета.

Студенческие годы были для него поистине счастливыми. Кипучая энергия и огромный интерес к жизни позволили ему сочетать учебу в лучшем вузе страны с такими увлекательными спортивными занятиями, как альпинизм, спелеология, туризм, прыжки с парашютом, прыжки в воду. В дни юности он приобрел свое самое главное богатство – множество друзей. Он легко сходился с людьми, любил их, поэтому рядом с ним всем было тепло и хорошо. Свою любовь и судьбу он нашел тогда же в секции спелеологии.

После окончания МГУ ему посчастливилось попасть в круг учеников замечательного математика и человека академика Льва Семеновича Понтрягина. В это время Виктор Иванович серьезно начал заниматься математической теорией оптимального управления, что стало делом всей его жизни. Он закончил аспирантуру Математического института им. В.А. Стеклова (МИАН) и работал там до конца жизни. Его кандидатская и докторская диссертации посвящены развитию теории оптимального управления с применением аппарата дифференциальных включений. Эти работы хорошо известны в мировом математическом сообществе.

Много лет Виктор Иванович был помощником Л.С. Понтрягина в его многогранной научной деятельности. С самого основания в 1973 г. факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ под руководством Л.С. Понтрягина создавалась кафедра оптимального управления, и Виктор Иванович внес огромный вклад в организацию учебного процесса. Он разработал и много лет читал курс лекций "Оптимальное управление", который пользовался большим успехом у студентов факультета.

Написанные им ранее на основе этих лекций учебные пособия "Линейная теория оптимального управления" (М.: Изд-во МГУ, 1978) и "Теория дифференциальных включений" Ч. 1 (М.: Изд-во МГУ, 1979) сыграли важную роль в формировании взглядов на предмет многих специалистов московской школы оптимального управления. Вообще, Виктор Иванович был замечательным учителем. Среди его учеников несколько докторов физико-математических наук и много кандидатов. Свой курс лекций он передал ученикам. И сегодня этот курс живет и развивается на основе подхода, который заложил В.И. Благодатских.

Предлагаемая читателю книга "Введение в оптимальное управление" является своего рода итогом многолетней педагогической работы профессора В.И. Благодатских. Она была задумана автором как введение в предмет, охватывающее все основные результаты теории как в линейном, так и в нелинейном случаях. Предполагалось, что изложенный материал будет рассчитан на два семестра лекций.

5 августа 1998 г. на пятьдесят третьем году жизни Виктор Иванович скоропостижно скончался, не осуществив до конца своего замысла. Он успел написать только первую, посвященную линейной теории, часть книги.

Рукопись подготовили к изданию коллеги Виктора Ивановича по кафедре. Основная роль в подготовке рукописи принадлежит его ученику, д–ру физ.-мат. наук, проф. Сергею Мироновичу Асееву, который дополнил материал книги параграфом "Условие общности положения" (см. лекцию 12).

И.В. Благодатских

ЛЕКЦИЯ 1

- *Общая постановка задачи оптимального управления: динамика объекта, класс допустимых управлений, начальное и конечное состояния объекта, критерий качества.*
- *Основные вопросы математической теории оптимального управления: управляемость, существование оптимального управления, необходимые условия оптимальности, достаточные условия оптимальности, единственность оптимального управления.*
- *Постановка линейной задачи быстродействия.*

1.1. Общая постановка задачи оптимального управления

Динамика объекта. Для задачи оптимального управления характерно наличие некоторого динамического объекта, т.е. объекта, меняющегося во времени. Пусть положение объекта в каждый момент времени t полностью характеризуется набором параметров $x^1(t), \ldots, x^n(t)$. Это могут быть координаты объекта в какой-то системе координат, координаты скорости и т.п. Вектор

$$\boldsymbol{x}(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$$

называется *фазовым вектором* объекта. Предполагается, что движением объекта можно управлять, т.е. объект снабжен некоторыми рулями, от положения которых зависит его поведение. Пусть положение рулей характеризуется в каждый момент времени t набором параметров $u^1(t), \ldots, u^m(t)$. Вектор

$$\boldsymbol{u}(t) = (u^1(t), \ldots, u^m(t))$$

называется *управляющим параметром* объекта или *управлением*. Естественно предположить, что состояние объекта в данный момент времени t зависит от того, какие значения принимает управление $\boldsymbol{u}(t)$ до момента времени t, и не зависит от будущего поведения управления.

В зависимости от того, как выражается зависимость вектора фазового состояния $\boldsymbol{x}(t)$ от управления $\boldsymbol{u}(t)$, рассматривают различные динамические объекты. Например, эта зависимость может описываться системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}). \tag{1.1}$$

В этом случае, зная значение управления $\boldsymbol{u}(t)$ в каждый момент времени t, можно определить *траекторию* объекта $\boldsymbol{x}(t)$ как решение дифференциального уравнения

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(t)).$$

Будем считать, что каким-то образом задана *динамика объекта*, т.е. закон изменения вектора состояния $\boldsymbol{x}(t)$ в зависимости от изменения вектора управления $\boldsymbol{u}(t)$.

Класс допустимых управлений. Ясно, что в конкретных физических объектах управление $\boldsymbol{u}(t)$ может не быть произвольным. На него наложены какие-то ограничения, вытекающие из физического смысла управления. Например, если $u^1(t)$ — тяга двигателя, то в каждый момент времени она должна удовлетворять ограничению

$$u_{\min} \leqslant u^1(t) \leqslant u_{\max}.$$

При этом тяга $u^1(t)$ может принимать также и крайние значения $u_{\min}$ и $u_{\max}$. Обычно предполагают, что вектор управления $\boldsymbol{u}(t)$ удовлетворяет в каждый момент времени t ограничению

$$\boldsymbol{u}(t) \in U, \tag{1.2}$$

где U — некоторое заданное множество. Как правило, в конкретных физических объектах множество U замкнуто. Эта замкнутость и не позволяет в общем случае исследовать поведение управляемого объекта методами классического вариационного исчисления. Кроме ограничения вида (1.2) могут быть наложены ограничения на зависимость управления $\boldsymbol{u}(t)$ от времени. Например, из физического смысла допустимыми управлениями могут быть либо гладкие функции, либо непрерывные, либо кусочно непрерывные и т.п. Будем считать, что каким-то образом задан *класс допустимых управлений* $\boldsymbol{u}(t)$.

Начальное и конечное состояния объекта. Предположим, что задан начальный момент времени t_0 и множество M_0 *допустимых начальных состояний* объекта. Кроме того, желательно управлять объектом так, чтобы в какой-то конечный момент времени t_1 объект перешел на некоторое множество M_1 *допустимых конечных состояний.* Будем считать, что допустимое управление $\boldsymbol{u}(t)$ переводит объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1 на отрезке времени $[t_0, t_1]$, если соответствующее этому управлению $\boldsymbol{u}(t)$ фазовое состояние объекта $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет условиям

$$\boldsymbol{x}(t_0) \in M_0, \quad \boldsymbol{x}(t_1) \in M_1. \tag{1.3}$$

Заметим, что конечный момент времени t_1 может быть, вообще говоря, не фиксированным, а определяться из условия попадания вектора $\boldsymbol{x}(t)$ на конечное множество M_1. Итак, предположим, что допустимые множества M_0 и M_1 заданы.

Критерий качества. Может случиться, что управляемый объект можно перевести из множества M_0 на множество M_1 многими способами. Часто на практике желательно среди всех таких переходов выбрать в каком-то смысле наилучший. Обычно предполагается, что каждому допустимому управлению $\boldsymbol{u}(t)$, заданному на отрезке $[t_0, t_1]$, и соответствующей ему траектории объекта $\boldsymbol{x}(t)$ сопоставлено некоторое число J, оценивающее качество пары $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$, т.е. задан *функционал*, или *критерий, качества* $J(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t))$. Например, этот функционал может иметь вид

$$J(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(s, \boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{u}(s))ds. \tag{1.4}$$

Теперь можно сформулировать *задачу оптимального управления.* Эта задача заключается в нахождении таких допустимого управления $\boldsymbol{u}^*(t)$ и соответствующей ему траектории объекта $\boldsymbol{x}^*(t)$, переводящей объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1, что при этом функционал качества $J(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t))$ принимает минимальное значение, т.е.

$$J(\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{x}^*(t)) = \min J(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)).$$

Здесь минимум берется по всевозможным допустимым управлениям $\boldsymbol{u}(t)$ и соответствующим траекториям $\boldsymbol{x}(t)$, переводящим объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1.

Рассмотрим примеры задач оптимального управления.

Пример 1. Пусть космический корабль движется по некоторой круговой орбите вокруг Земли. С разумной степенью точности поведение корабля можно описать системой дифференциальных уравнений типа (1.1). При этом координатами вектора фазового состояния $\boldsymbol{x}(t)$ могут быть координаты вектора положения корабля относительно неподвижной системы координат, связанной с Землей, координаты вектора скорости, углы, задающие ориентацию корабля, угловая скорость и т.п. Координатами вектора управления $\boldsymbol{u}(t)$ могут быть углы поворота струи реактивного двигателя, расход топлива в единицу времени и т.п. Выбирая те или иные значения координат вектора управления $\boldsymbol{u}(t)$, можно заставить космический корабль двигаться по той или иной траектории $\boldsymbol{x}(t)$.

Предположим, что корабль нужно перевести на новую круговую орбиту, т.е. подобрать управление $\boldsymbol{u}(t)$ таким образом, чтобы соответствующая траектория $\boldsymbol{x}(t)$ начиналась в момент времени t_0 на первой круговой орбите и заканчивалась в некоторый момент времени t_1 на второй круговой орбите. При этом за множество начальных состояний M_0 можно взять значения координат корабля на первой орбите, допустимые начальные скорости и т.п., т.е. значения вектора $\boldsymbol{x}(t_0)$. Аналогично обстоит дело с множеством конечных состояний M_1.

Критерием качества может служить общее количество топлива, затраченное на переход с первой орбиты на вторую. Таким образом, задача оптимального управления будет заключаться в выборе таких допустимого управления $\boldsymbol{u}(t)$ и соответствующей траектории $\boldsymbol{x}(t)$, чтобы перевод космического корабля с первой круговой орбиты на вторую осуществлялся с минимальным расходом топлива.

Пример 2. Рассмотрим физический маятник, который находится в положении равновесия. Если y — отклонение маятника от положения равновесия, то уравнение маятника в случае колебаний с малой амплитудой имеет вид

$$\ddot{y} + y = 0.$$

Предположим, что к маятнику можно прикладывать внешнюю управляющую силу u, ограниченную по величине, например единицей, так что $|u| \leqslant 1$. Тогда уравнение управляемого маятника имеет вид

$$\ddot{y} + y = u.$$

Приведем это уравнение к виду (1.1), положив $x^1 = y$, $x^2 = \dot{y}$. Тогда имеем

$$\begin{cases} \dot{x}^1 &= x^2, \\ \dot{x}^2 &= -x^1 + u. \end{cases} \tag{1.5}$$

В данном случае фазовый вектор $x = (x^1, x^2)$ имеет всего две координаты: $x^1 = y$ — отклонение маятника от положения равновесия и $x^2 = \dot{y}$ — скорость отклонения. Положение равновесия при выключенном управлении, т.е. при $u = 0$, задается условием $x^1 = 0$, $x^2 = 0$. Предположим, что под воздействием каких-либо внешних возмущений маятник отбрасывается в произвольное положение $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$. Нахождение в этом положении нежелательно из физических соображений, и нужно как можно скорее перевести маятник в положение равновесия, выбирая для этого соответствующим образом внешнюю силу $u(t)$, при этом опять же из физических соображений функция $u(t)$ должна быть, например, кусочно непрерывной.

Таким образом, приходим к следующей задаче оптимального управления. Подобрать такую кусочно непрерывную внешнюю силу $u(t)$, удовлетворяющую ограничению $|u| \leqslant 1$, чтобы соответствующая траектория маятника $x(t)$, т.е. решение уравнения (1.5), перешла из начального состояния $M_0 = \{x_0\} = \{(x_0^1, x_0^2)\}$ в положение равновесия $M_1 = \{(0, 0)\}$ за наименьшее время.

1.2. Основные вопросы математической теории оптимального управления

Выше мы определили основные элементы постановки задачи оптимального управления и разобрали два примера. Прежде чем перейти к математическому исследованию задачи оптимального управления, рассмотрим, какие вопросы включает в себя *математическая теория оптимального управления.*

Управляемость. Прежде всего возникает вопрос, а существует ли хотя бы одно допустимое управление $u(t)$, которое переводит динамический объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1, т.е. существует ли такое допустимое управление $u(t)$, при котором соответствующий вектор фазового состояния $x(t)$ удовлетворяет условиям (1.3). Если этот вопрос решается положительно, то будем говорить, что объект является *управляемым* из множества M_0 на множество M_1. В противном случае сама постановка задачи оптимального управления теряет смысл.

Существование оптимального управления. Если вопрос об управляемости решается положительно, т.е. существует некоторое управление $u(t)$, переводящее объект из множества M_0 на множество M_1, то необходимо выяснить, *существует ли оптимальное управление.* Инженеры, как правило, при решении конкретных задач не ставят такого вопроса, а просто пытаются найти наилучшее управление доступными им средствами. С математической точки зрения этот вопрос является одним из основных, и если оптимального управления не существует, то дальнейшие поиски его становятся бессмысленными. В математике мы имеем дело всегда лишь с некоторой моделью реального физического объекта, и отсутствие в модели оптимального управления может указывать на то, что модель построена неправильно.

Необходимые условия оптимальности. Если оптимальное управление в задаче существует, то далее нужно развивать методы нахождения этого оптимального управления. Даже в простых задачах может оказаться бесконечно много допустимых управлений, переводящих объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1. Поэтому простым перебором всех допустимых управлений обойтись не удается. Возникает вопрос, как сузить класс управлений, подозрительных на оптимальность. Решить его позволяют *необходимые условия оптимальности.* Таким образом, оптимальное управление нужно искать лишь среди множества допустимых управлений, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности.

Таким необходимым условием оптимальности является *принцип максимума Понтрягина.* Первоначально он был высказан в качестве гипотезы академиком Львом Семеновичем Понтрягиным в 1953 г. для управляемых систем, динамика которых описывается уравнением вида (1.1), а затем доказан его учениками. По существу, с принципа максимума и началась математическая теория оптимального управления. В некоторых задачах оказывается даже, что принципу максимума удовлетворяет лишь конечное число управлений, среди которых уже нетрудно выбрать оптимальное. Полное доказательство принципа максимума было опубликовано в 1961 г. Л.С. Понтрягиным и его учениками в книге [1]. Применение принципа максимума сразу же позволило решить многие интересные инженерные задачи, а в других задачах существенно приблизиться к нахождению оптимального управления. Не случайно уже в 1962 г. эта книга была отмечена Ленинской премией.

Достаточные условия оптимальности. Во многих задачах, несмотря на то, что необходимые условия оптимальности и позволяют сузить класс управлений, подозрительных на оптимальность, все же этот класс остается достаточно широким. Отобрать действительно оптимальное управление в этом классе позволяют достаточные условия оптимальности. Если некоторое управление $u(t)$ из этого класса удовлетворяет достаточным условиям оптимальности, то тем самым гарантируется его оптимальность. Конечно, может случиться, что достаточным условиям оптимальности удовлетворяет не одно, а несколько управлений. Тем самым гарантируется, что все они оптимальны, т.е. функционал качества принимает на всех этих управлениях одинаковое и притом минимальное значение.

Единственность оптимального управления. Инженерам очень важно знать, является ли оптимальное управление единственным. Если оно единственно, то в конкретных управляемых объектах реализация единственного оптимального управления может оказаться существенно проще. Поэтому вопрос о единственности оптимального управления также входит в число основных вопросов математической теории оптимального управления.

Конечно, мы перечислили не все вопросы, которые могут возникнуть при решении задачи оптимального управления, а только основные. Естественно, что эти вопросы могут исследоваться для конкретного управляемого объекта не обязательно в той последовательности, в какой они здесь приведены. Например, если сначала установлено, что оптимальное управление существует, и мы нашли единственное допустимое управление $\boldsymbol{u}(t)$, переводящее объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1 и удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности, то тем самым гарантируется, что это управление $\boldsymbol{u}(t)$ оптимально.

Линейная задача быстродействия. Итак, мы сформулировали общую постановку задачи оптимального управления и рассмотрели некоторые основные вопросы, возникающие при решении этой задачи. В настоящей книге мы в основном будем изучать математическую теорию для простейшей задачи оптимального управления — линейной задачи быстродействия. Динамика объекта в этой задаче будет описываться системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}, \tag{1.6}$$

где $\boldsymbol{x}$ — n-мерный вектор фазового состояния объекта, $\boldsymbol{u}$ — n-мерный вектор управления, на который наложено ограничение $\boldsymbol{u}(t) \in U$, A — постоянная матрица размером $n \times n$. Зная некоторую допустимую функцию управления $\boldsymbol{u}(t)$ и начальное состояние объекта $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, можно получить единственную функцию $\boldsymbol{x}(t)$ вектора фазового состояния объекта как решение дифференциального уравнения (1.6). Класс допустимых управлений определим позднее, когда будет изучен некоторый вспомогательный математический аппарат.

Начальное и конечное состояния объекта будем выбирать как элементы некоторых непустых и компактных подмножеств M_0 и M_1 соответственно из n-мерного фазового пространства. Критерием качества будет служить время перехода из множества M_0 на множество M_1, т. е.

$$J(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)) = t_1 - t_0.$$

Такой критерий качества получается из критерия качества (1.4), когда подынтегральная функция имеет вид

$$f^0(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \equiv 1.$$

Таким образом, мы пришли к постановке *линейной задачи быстродействия*. Эта задача заключается в нахождении допустимого управления $u^*(t)$ и соответствующего ему решения $x^*(t)$ уравнения (1.6), переводящего объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1 за минимальное время. Приведенный выше пример 2 является линейной задачей быстродействия.

Линейная задача быстродействия выбрана для первого знакомства с теорией оптимального управления не случайно. Она обладает многими преимуществами.

Во-первых, для линейного дифференциального уравнения (1.6) можно в явном виде получить зависимость траектории $x(t)$ от управления $u(t)$. Это позволяет эффективно исследовать все основные вопросы математической теории оптимального управления.

Во-вторых, на примере линейной задачи быстродействия достаточно ярко проявляются все характерные трудности, присущие общим задачам оптимального управления.

Первая часть книги (лекции 2 – 5) посвящена изучению вспомогательного математического аппарата. Подробно будут рассмотрены такие понятия, как опорная функция, многозначные отображения, интегралы от многозначных отображений и т.д. Эти понятия находят широкое применение в различных разделах математики. С их помощью во второй части книги будут исследованы основные вопросы математической теории оптимального управления на примере линейной задачи быстродействия.

ЛЕКЦИЯ 2

- *Основные определения и обозначения.*
- *Пространство $\Omega(E^n)$, состоящее из всех непустых компактных подмножеств евклидова векторного пространства E^n.*
- *Операции сложения двух элементов и умножение элемента на число в пространстве $\Omega(E^n)$.*
- *Образ множества при линейном преобразовании.*
- *Понятие расстояния в пространстве $\Omega(E^n)$.*

2.1. Основные определения

Пространство E^n. Рассмотрим n-мерное евклидово векторное пространство E^n с элементами $\boldsymbol{x} = (x^1, \dots, x^n)$. В частности, E^1 — числовая ось, E^2 — двумерная плоскость и т.д. Как правило, строчными буквами (жирным шрифтом) будем обозначать векторы или, что то же самое, точки пространства E^n, а прописными — подмножества пространства E^n. При этом векторы будем иногда рассматривать как множества, состоящие из одной точки. В этом случае они будут записаны в фигурных скобках. Например, $\boldsymbol{x}$ — точка, а $\{\boldsymbol{x}\}$ — множество, состоящее из одной точки $\boldsymbol{x}$. Пространство E^n является линейным пространством с обычными операциями сложения векторов, умножения вектора на число и скалярным произведением $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x^1 y^1 + \dots + x^n y^n$. Это пространство является также нормированным с нормой $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$. Будем использовать только такую норму в пространстве E^n. Эта норма естественным образом определяет расстояние $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ между точками $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E^n$, или метрику в пространстве E^n.

Множества. Рассмотрим различные виды множеств в пространстве E^n. При этом для множеств будем использовать обычные символы включения $\subset$, равенства $=$, неравенства $\neq$, объединения $\cup$, пересечения $\cap$ и дополнения $\setminus$ одного множества до другого. Символом $\emptyset$ будем обозначать пустое множество.

Точка $\boldsymbol{f} \in E^n$ называется *предельной точкой* множества F, если в любой ее окрестности содержится хотя бы одна точка множества F. Множество F называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. *Замыканием* $\overline{F}$ множества F называется наименьшее замкнутое множество, содержащее множество F. Ясно, что если множество F замкнуто, то $\overline{F} = F$.

Пример 1. Рассмотрим в пространстве E^n множество P, заданное условием

$$P = \{\boldsymbol{x} \in E^n : \ \|\boldsymbol{x}\| < 1\}.$$

Это множество не является замкнутым, так как, например, предельная точка $\boldsymbol{p} = (1, 0, \ldots, 0)$ множества P ему не принадлежит. Ясно, что шар $S_r(\boldsymbol{a})$ радиуса r с центром в точке $\boldsymbol{a}$ из пространства E^n

$$S_r(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in E^n : \ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| \leqslant r\} \tag{2.1}$$

является множеством замкнутым. Шар $S_1(\boldsymbol{0})$ является замыканием множества P, т.е. $\overline{P} = S_1(\boldsymbol{0})$.

Множество $F \subset E^n$ называется *ограниченным*, если оно содержится в шаре некоторого конечного радиуса, т.е. если $F \subset \subset S_r(\boldsymbol{0})$ для некоторого $r \geqslant 0$. Множество $F \subset E^n$ называется *компактным*, если оно замкнуто и ограничено. Так, множество $S_r(\boldsymbol{a})$ из примера 1 компактно, а множество P некомпактно, так как оно не замкнуто. Прямая линия на плоскости есть множество, некомпактное из-за своей неограниченности.

Если множество F компактно, то *модулем* $|F|$ множества F назовем число

$$|F| = \max_{\boldsymbol{f} \in F} \|\boldsymbol{f}\|. \tag{2.2}$$

В силу компактности множества F и непрерывности нормы $\|\boldsymbol{f}\|$ максимум в формуле (2.2) достигается всегда. Геометрический смысл модуля множества F таков: это есть радиус наименьшего шара с центром в начале координат, содержащего множество F (рис. 1), что следует из соотношения

$$|F| = \max_{\boldsymbol{f} \in F} \|\boldsymbol{f}\| = \min\{r \geqslant 0 : \|\boldsymbol{f}\| \leqslant r, \ \boldsymbol{f} \in F\} = \\ = \min\{r \geqslant 0 : F \subset S_r(\boldsymbol{0})\}.$$

Таким образом, всегда выполняется включение

$$F \subset S_{|F|}(\mathbf{0}). \qquad (2.3)$$

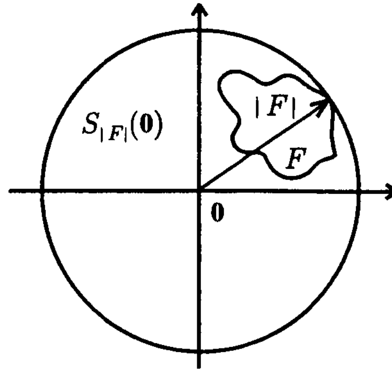


Рис. 1

Точка $\boldsymbol{f}$ называется *внутренней* точкой множества F, если $S_\varepsilon(\boldsymbol{f}) \subset F$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Множество F называется *открытым*, если любая его точка внутренняя. Совокупность всех внутренних точек множества F называется его *внутренностью* и обозначается через $\operatorname{int} F$. Так, в примере 1 $\operatorname{int} S_1(\mathbf{0}) = P$. *Границей* ∂F множества F называется множество $\partial F = \overline{F} \setminus \operatorname{int} F$. Если

$$S = \{\boldsymbol{x} \in E^n : \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$$

— *единичная сфера* в пространстве E^n, то $\partial P = S$.

Множество F называется *выпуклым*, если для любых двух точек $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ множества F отрезок, соединяющий точки $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$, также принадлежит множеству F. Отрезок $[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2]$, соединяющий две точки $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in E^n$, имеет вид

$$[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2] = \{\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 : \ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}.$$

Таким образом, множество F называется выпуклым, если для любых точек $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in E^n$ и любого числа $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ выполняется условие $\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \in F$. *Выпуклой оболочкой* $\operatorname{conv} F$ множества F называется наименьшее выпуклое множество, содержащее множество F. Так, произвольный шар $S_r(\boldsymbol{a})$ является множеством выпуклым, а единичная сфера S — множество невыпуклое, при этом $\operatorname{conv} S = S_1(\mathbf{0})$. Множество P из примера 1 выпукло. Если множество F выпукло, то $\operatorname{conv} F = F$.

2.2. Пространство $\Omega(E^n)$

Рассмотрим пространство $\Omega(E^n)$, состоящее из всех непустых компактных подмножеств пространства E^n. В частности, элементами пространства $\Omega(E^n)$ являются все возможные шары $S_r(\boldsymbol{a})$, точки пространства E^n, т.е. множества $\{\boldsymbol{x}\}$, и т.д. Кроме обычных теоретико-множественных операций рассмотрим в пространстве $\Omega(E^n)$ еще две операции: операцию суммы и операцию умножения на число.

Алгебраическая сумма множеств. *Алгебраической суммой* или просто *суммой* двух непустых компактных множеств F и G из пространства E^n или, что то же самое, двух элементов $F, G \in \Omega(E^n)$, называется множество

$$F + G = \{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} : \ \boldsymbol{f} \in F, \ \boldsymbol{g} \in G\}. \tag{2.4}$$

Алгебраическая сумма не выводит из пространства $\Omega(E^n)$, т.е. сумма $F + G$ двух множеств $F, G \in \Omega(E^n)$ является непустым замкнутым и ограниченным множеством. Если, например, множество F состоит из единственной точки, т.е. $F = \{\boldsymbol{f}\}$, то множество $\{\boldsymbol{f}\} + G$ получается параллельным сдвигом множества G на вектор $\boldsymbol{f}$.

Непустота множества $F + G$ является следствием того, что множества F, G непусты и, таким образом, существует хотя бы один элемент вида $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$.

Докажем, что алгебраическая сумма двух множеств $F, G \in \in \Omega(E^n)$ является множеством замкнутым. Пусть задана последовательность $\boldsymbol{x}_k \in F + G$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$. Требуется показать, что $\boldsymbol{x} \in F + G$.

По определению суммы $F + G$ (2.4) имеем $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{f}_k + \boldsymbol{g}_k$ и $\boldsymbol{f}_k \in F$, $\boldsymbol{g}_k \in G$. Все элементы последовательности $\{\boldsymbol{f}_k\}$ принадлежат компактному множеству F, следовательно, найдется такая подпоследовательность (обозначим ее снова через $\{\boldsymbol{f}_k\}$), что

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{f}_k = \boldsymbol{f} \in F.$$

Аналогично из $\boldsymbol{g}_k$ выделим такую подпоследовательность, что

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{g} \in G.$$

Таким образом, для вектора $\boldsymbol{x}$ имеем представление

$$\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \lim_{k\to\infty} (\boldsymbol{f}_k + \boldsymbol{g}_k) = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{f}_k + \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{g},$$

т.е. $\boldsymbol{x} \in F + G$ и тем самым замкнутость суммы доказана.

Множество $F+G$ ограничено. Действительно, в силу формулы (2.3) имеем включения $F \subset S_{|F|}(\mathbf{0})$, $G \subset S_{|G|}(\mathbf{0})$, причем величины $|F|$ и $|G|$ конечны из-за ограниченности множеств F и G. Учитывая соотношение (2.2), получаем для любых векторов $\boldsymbol{f} \in F$, $\boldsymbol{g} \in G$ неравенства $\|\boldsymbol{f}\| \leqslant |F|$, $\|\boldsymbol{g}\| \leqslant |G|$. По определению алгебраической суммы (2.4) для любого вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} \in F + G$ выполняется неравенство треугольника

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}\| \leqslant \|\boldsymbol{f}\| + \|\boldsymbol{g}\|$$

и, следовательно, для множеств также выполнено неравенство треугольника

$$|F+G| \leqslant |F| + |G|.$$

Таким образом, включение

$$F + G \subset S_{|F+G|}(\mathbf{0}) \subset S_{|F|+|G|}(\mathbf{0})$$

справедливо, т.е. множество $F+G$ ограничено.

Если множества F, G выпуклы, то их алгебраическая сумма $F+G$ также будет множеством выпуклым. Действительно, пусть заданы произвольные векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in F+G$ и число $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Покажем, что вектор $\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2$ принадлежит множеству $F+G$. По определению суммы (2.4) имеем представление

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{g}_1, \quad \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{g}_2, \quad \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \in F, \quad \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2 \in G,$$

следовательно,

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 = \lambda \boldsymbol{f}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{f}_2 + \lambda \boldsymbol{g}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{g}_2.$$

В силу выпуклости множеств F, G справедливы включения

$$\boldsymbol{f} = \lambda \boldsymbol{f}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{f}_2 \in F, \quad \boldsymbol{g} = \lambda \boldsymbol{g}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{g}_2 \in G.$$

Используя еще раз определение суммы множеств, получим $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} \in F + G$, т.е. множество $F+G$ выпукло.

Пример 2. Рассмотрим, чему равна алгебраическая сумма двух произвольных шаров. Оказывается, что

$$S_{r_1}(\boldsymbol{a}_1) + S_{r_2}(\boldsymbol{a}_2) = S_{r_1+r_2}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2), \tag{2.5}$$

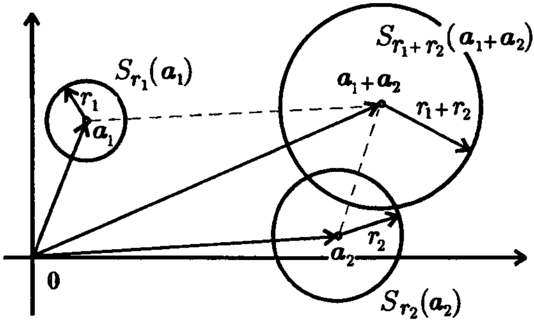


Рис. 2

т.е. при сложении двух шаров их радиусы суммируются и векторы, задающие центры шаров, также суммируются (рис. 2).

Докажем этот факт, т.е. покажем, что множества в левой и правой частях формулы (2.5) совпадают. Если

$$\boldsymbol{x} \in S_{r_1}(\boldsymbol{a}_1) + S_{r_2}(\boldsymbol{a}_2),$$

то по определению суммы двух множеств (2.4) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$, где $\boldsymbol{f} \in S_{r_1}(a_1)$, $\boldsymbol{g} \in S_{r_2}(a_2)$. Отсюда по определению шара (2.1) имеем

$$\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{a}_1\| \leqslant r_1, \qquad \|\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}_2\| \leqslant r_2.$$

Учитывая эти неравенства, получаем

$$\|\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)\| = \|\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}-\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2\| \leqslant \|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{a}_1\|+\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{a}_2\| \leqslant r_1+r_2,$$

т.е. $\boldsymbol{x} \in S_{r_1+r_2}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)$ и в одну сторону включение в формуле (2.5) доказано. Теперь, если $\boldsymbol{x} \in S_{r_1+r_2}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)$, то

$$\lambda = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2\| \leqslant r_1 + r_2.$$

Если $\lambda = 0$, то очевидно, что

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \in S_{r_1}(\boldsymbol{a}_1) + S_{r_2}(\boldsymbol{a}_2).$$

Пусть теперь $\lambda \neq 0$. Существуют такие положительные числа $\lambda_1 \leqslant r_1$ и $\lambda_2 \leqslant r_2$, что $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$. Тогда

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{a}_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2) \in S_{r_1}(\boldsymbol{a}_1),$$

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{a}_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2) \in S_{r_2}(\boldsymbol{a}_2)$$

и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$. Таким образом, $\boldsymbol{x} \in S_{r_1}(\boldsymbol{a}_1)+S_{r_2}(\boldsymbol{a}_2)$ и формула (2.5) доказана полностью. Из этой формулы при $r_1 = r$, $r_2 = 0$, $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}$ следует соотношение

$$S_r(\boldsymbol{0}) + \{\boldsymbol{a}\} = S_r(\boldsymbol{a}). \quad (2.6)$$

Пример 3. Пусть множество F — это квадрат на плоскости E^2,

$$F = \{\boldsymbol{x} \in E^2 : |x^1| \leqslant 1, |x^2| \leqslant 1\},$$

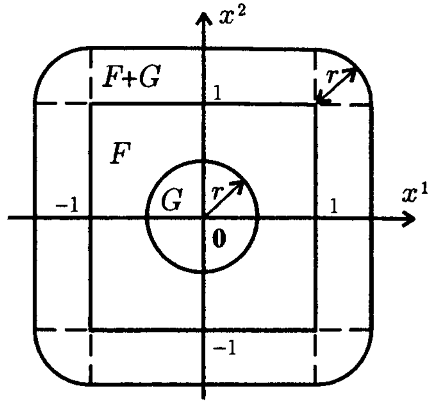


Рис. 3

а множество G — шар радиуса r с центром в начале координат, $G = S_r(\boldsymbol{0})$. Их сумма $F + G$ изображена на рис. 3.

Операция алгебраической суммы для любых множеств F, G, $P \in \Omega(E^n)$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) коммутативности: $F + G = G + F$;

2) ассоциативности: $F + (G + P) = (F + G) + P$;

3) в пространстве $\Omega(E^n)$ существует нулевой элемент $\{\boldsymbol{0}\}: \ F + \{\boldsymbol{0}\} = F$.

Доказательство этих свойств непосредственно следует из определения (2.4) алгебраической суммы и соответствующих свойств для векторов из пространства E^n. Необходимо отметить, что если множество F состоит более чем из одной точки, то у такого множества F нет обратного элемента относительно введенной операции алгебраической суммы множеств, т.е. не существует такого множества $-F \in \Omega(E^n)$, что $F + (-F) = \{\boldsymbol{0}\}$. Если же $F = \{\boldsymbol{f}\}$, то $-F = \{-\boldsymbol{f}\}$.

Умножение множества на число. *Произведением* множества $F \in \Omega(E^n)$ на число λ называется множество

$$G = \lambda F = \{\boldsymbol{g} = \lambda \boldsymbol{f} : \ \boldsymbol{f} \in F\} \quad (2.7)$$

(рис. 4). В этом случае $G \in \Omega(E^n)$, т.е. произведение множества $F \in \Omega(E^n)$ на произвольное число λ является непустым замкнутым и ограниченным множеством и, следовательно, не выводит из пространства $\Omega(E^n)$. Далее, если F — множество выпуклое, то и множество $G = \lambda F$ также выпуклое. Эти факты

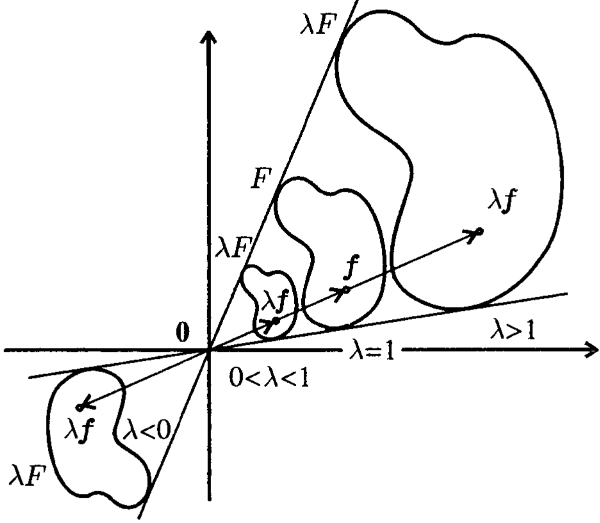


Рис. 4

доказываются так же просто, как и соответствующие свойства алгебраической суммы множеств (читателю предлагается сделать это самостоятельно).

Пример 4. Докажем, что

$$\lambda S_r(\mathbf{0}) = S_{|\lambda| r}(\mathbf{0}). \tag{2.8}$$

Действительно, если $\boldsymbol{g} \in \lambda S_r(\mathbf{0})$, то $\boldsymbol{g} = \lambda \boldsymbol{f}$, где $\boldsymbol{f} \in S_r(\mathbf{0})$. В этом случае

$$\|\boldsymbol{g}\| = \|\lambda \boldsymbol{f}\| = |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{f}\| \leqslant |\lambda| r,$$

т.е. $\boldsymbol{g} \in S_{|\lambda| r}(\mathbf{0})$. Наоборот, если $\boldsymbol{g} \in S_{|\lambda| r}(\mathbf{0})$ и $\lambda \neq 0$ (при $\boldsymbol{\lambda} = 0$ формула (2.8) очевидна), то $\boldsymbol{f} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{g} \in S_r(\mathbf{0})$ и $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{\lambda f}$. Таким образом, $\boldsymbol{g} \in S_r(\mathbf{0})$ и формула (2.8) доказана.

Из формул (2.6) и (2.8) следует, что любой шар $S_r(\boldsymbol{a})$ можно представить в виде

$$S_r(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{a}\} + r S_1(\mathbf{0}).$$

Непосредственно можно проверить, что для любых чисел α, β и любых двух множеств $F, G \in \Omega(E^n)$ выполняются следующие свойства:

1) $\alpha(\beta F) = (\alpha\beta) F$;

2) $1 \cdot F = F$;

3) $\alpha(F + G) = \alpha F + \alpha G$.

Эти свойства являются следствием соответствующих свойств векторов из пространства E^n.

Пространство $\Omega(E^n)$ не является линейным пространством с операциями алгебраической суммы двух множеств и умножения множества на число хотя бы потому, что не у каждого элемента $F \in \Omega(E^n)$ есть обратный элемент $-F$. Кроме того, не всегда выполняется необходимый для линейности закон дистрибутивности, т.е. не всегда выполняется равенство

$$(\alpha + \beta)F = \alpha F + \beta F. \tag{2.9}$$

Приведем пример.

Пример 5. Пусть $F = S_1(\mathbf{0})$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$. Тогда по формуле (2.8)

$$\alpha F = 1 \cdot S_1(\mathbf{0}) = S_1(\mathbf{0}), \qquad \beta F = -1 \cdot S_1(\mathbf{0}) = S_1(\mathbf{0}),$$

и в силу формулы (2.5) $\alpha F + \beta F = S_2(\mathbf{0})$. Однако

$$(\alpha + \beta)F = (1 - 1)F = 0 \cdot F = \{\mathbf{0}\}.$$

Таким образом, $\{\mathbf{0}\} \neq S_2(\mathbf{0})$ и формула (2.9) неверна.

Вместо равенства в формуле (2.9) справедливо лишь одностороннее включение

$$(\alpha + \beta)F \subset \alpha F + \beta F. \tag{2.10}$$

Действительно, если $\boldsymbol{x} \in (\alpha + \beta)F$, то по определению операции умножения на число (2.7) существует такой элемент $\boldsymbol{f} \in F$, что

$$\boldsymbol{x} = (\alpha + \beta)\boldsymbol{f} = \alpha\boldsymbol{f} + \beta\boldsymbol{f}.$$

Далее, так как $\alpha\boldsymbol{f} \in \alpha F$, $\beta\boldsymbol{f} \in \beta F$, то

$$\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{f} + \beta\boldsymbol{f} \in \alpha F + \beta F$$

и требуемое включение доказано.

Оказывается, что если $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ и множество F выпукло, то формула (2.9) в этом случае справедлива. Докажем это. Пусть $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ и $\alpha + \beta \neq 0$. При $\alpha + \beta = 0$ имеем $\alpha = 0$,

$\beta = 0$ и формула (2.9) очевидна. В силу выпуклости множества F выполняется включение

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}F + \frac{\beta}{\alpha+\beta}F \subset F. \tag{2.11}$$

Действительно, пусть

$$\boldsymbol{x} \in \frac{\alpha}{\alpha+\beta}F + \frac{\beta}{\alpha+\beta}F,$$

тогда существуют векторы $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \in F$ такие, что

$$\boldsymbol{x} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\boldsymbol{f}_1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\boldsymbol{f}_2.$$

Далее, имеем

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \geqslant 0, \qquad \frac{\beta}{\alpha+\beta} \geqslant 0, \qquad \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1.$$

Учитывая выпуклость множества F, получаем, что $\boldsymbol{x} \in F$ и включение (2.11) доказано. Согласно свойству 3 операции умножения преобразуем включение (2.11) к виду $\alpha F + \beta F \subset (\alpha+\beta)F$. Отсюда из противоположного включения (2.10) следует равенство (2.9).

Рассмотрим подпространство $\operatorname{conv}\Omega(E^n)$ пространства $\Omega(E^n)$, состоящее из всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства E^n. Приведенные выше свойства операций алгебраической суммы множеств и умножения множества на число показывают, что если рассматривать умножение выпуклых множеств только на неотрицательные числа, то для пространства $\operatorname{conv}\Omega(E^n)$ справедливы все аксиомы линейности, кроме аксиомы существования обратного элемента. В этом смысле пространство $\operatorname{conv}\Omega(E^n)$ напоминает выпуклый конус с вершиной в нуле, не совпадающий со всем пространством.

Образ множества при линейном преобразовании. Пусть $F \in \Omega(E^n)$ и в пространстве E^n задано линейное преобразование с помощью матрицы A (с действительными элементами) размером $n \times n$. *Образом* множества F при линейном преобразовании A называется множество

$$G = AF = \{\boldsymbol{g} = A\boldsymbol{f} : \ \boldsymbol{f} \in F\}. \tag{2.12}$$

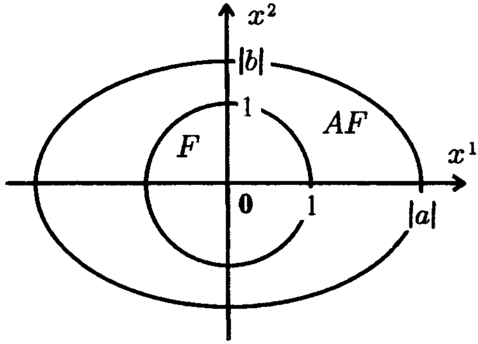


Рис. 5

Легко проверить, что $G \in \Omega(E^n)$, т.е. образ множества $F \in \in \Omega(E^n)$ при линейном преобразовании A является непустым, замкнутым и ограниченным множеством. Если F — выпуклое множество, то и множество $G = AF$ также выпукло.

Пример 6. Пусть $A = \lambda E$, где λ — некоторое число, а E — единичная матрица размером $n \times n$. Тогда для произвольного вектора $\boldsymbol{f} \in E^n$ имеем $A\boldsymbol{f} = \lambda E\boldsymbol{f} = \lambda\boldsymbol{f}$. Следовательно, образом AF произвольного множества F при таком линейном преобразовании $A = \lambda E$ будет множество λF. Таким образом, умножение множества на число является частным случаем линейного преобразования при $A = \lambda E$.

Пример 7. Пусть $n = 2$, $F = S_1(0)$ и матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Легко показать, что единичный шар $S_1(0)$ при таком линейном преобразовании A перейдет в эллипс

$$AF = \left\{\boldsymbol{x} \in E^2 : \left(\frac{x^1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{b}\right)^2 \leqslant 1\right\},$$

если $a \neq 0$, $b \neq 0$ (рис. 5), или в отрезок

$$AF = \{\boldsymbol{x} \in E^2 : x^1 = 0, \ |x^2| \leqslant |b|\},$$

если $a = 0$, $b \neq 0$, или в отрезок

$$AF = \{\boldsymbol{x} \in E^2 : x^2 = 0, \ |x^1| \leqslant |a|\},$$

если $a \neq 0$, $b = 0$.

Для любых матриц A, B и любых множеств F, $G \in \Omega(E^n)$ выполняются следующие свойства:

1) $A(BF) = (AB)F$;
2) $EF = F$;
3) $A(F+G) = AF + AG$;
4) $(A+B)F \subset AF + BF$.

Свойства 1 — 3 являются следствием соответствующих свойств векторов из пространства E^n. Свойство 4 доказывается так же, как и соответствующее включение (2.10) для операции умножения множества на число.

Хаусдорфово расстояние. В пространстве $\Omega(E^n)$ можно ввести *метрику*, или *расстояние*, $h(F, G)$ между двумя множествами $F, G \in \Omega(E^n)$ по формуле

$$h(F,G) = \min\{r \geqslant 0 : \ F \subset G + S_r(0), \ G \subset F + S_r(0)\}. \quad (2.13)$$

Таким образом, расстоянием между двумя множествами является наименьшее из положительных чисел r, для которых выполняются одновременно два включения

$$F \subset G + S_r(0), \quad G \subset F + S_r(0). \quad (2.14)$$

Эта метрика называется *хаусдорфовой*.

Рассмотрим пример расстояния $h(F, G)$.

Пример 8. Пусть $F = \{0\}$, $G = S_1(0)$ — два множества в пространстве E^n. Первое из включений (2.14) в данном случае выполняется всегда, так как $\{0\} \subset S_1(0) + S_r(0)$ для любых $r \geqslant 0$. Второе включение $S_1(0) \subset S_r(0)$ выполняется, если $r \geqslant 1$. Таким образом, минимальным числом r, для которого одновременно выполняются оба включения (2.14), будет число $r = 1$, т.е. в данном примере $h(F, G) = 1$.

Пример 9. Докажем, что

$$h(F, \{0\}) = |F|.$$

Действительно, по определению расстояние $h(F, \{0\})$ — минимальное из чисел $r \geqslant 0$, для которых выполняются одновременно два включения

$$F \subset \{0\} + S_r(0), \quad \{0\} \subset F + S_r(0).$$

Выполнение первого включения для некоторого $r \geqslant 0$ влечет за собой выполнение второго включения. Таким образом, $h(F, \{0\})$ есть минимальное число $r \geqslant 0$, для которого выполнено включение $F \subset S_r(0)$, т.е. это — модуль $|F|$ множества F.

Докажем, что функция $h(F, G)$ действительно является расстоянием, т.е. удовлетворяет всем аксиомам расстояния. Для этого нужно доказать, что для любых множеств $F, G, P \in \Omega(E^n)$ выполняются следующие свойства:

1) $h(F, G) \geqslant 0$;
2) $h(F, G) = 0$ тогда и только тогда, когда $F = G$;
3) $h(F, G) = h(G, F)$;
4) $h(F, G) \leqslant h(F, P) + h(P, G)$.

Проверка первых трех свойств не представляет трудностей, поэтому докажем только свойство 4. Пусть $h(F, P) = \alpha$, $h(P, G) = \beta$. Тогда согласно формуле (2.13) выполняются следующие включения:

$$\begin{aligned} &F \subset P + S_\alpha(0), \quad P \subset F + S_\alpha(0), \\ &P \subset G + S_\beta(0), \quad G \subset P + S_\beta(0). \end{aligned}$$

Комбинируя эти включения, получаем

$$F \subset P + S_\alpha(0) \subset G + S_\beta(0) + S_\alpha(0) = G + S_{\alpha+\beta}(0).$$

Аналогичным образом выводится включение $G \subset F + S_{\alpha+\beta}(0)$. А так как хаусдорфово расстояние $h(F, G)$ — наименьшее из чисел, для которых выполняются одновременно последние два включения, то $h(F, G) \leqslant \alpha + \beta$. Тем самым свойство 4 доказано.

2.3. Задачи

1. Выполняется ли для любого множества $F \in \Omega(E^n)$ равенство $F + F = 2F$?

2*. Множество $F \in \Omega(E^n)$ обладает тем свойством, что для любых двух его точек $x_1, x_2 \in F$ середина отрезка $\frac{x_1+x_2}{2}$, соединяющего эти точки, принадлежит множеству F. Докажите, что множество F выпукло.

---

*Звездочкой отмечены задачи повышенной сложности.

3*. Для множества $F \in \Omega(E^n)$ существует такое число λ, $0 < \lambda < 1$, что выполняется включение

$$\lambda F + (1-\lambda)F \subset F.$$

Докажите, что множество F выпукло.

4. Множества $F_1, F_2, G_1, G_2 \in \Omega(E^n)$ удовлетворяют включениям

$$F_1 \subset F_2, \quad G_1 \subset G_2.$$

Для произвольного числа λ и произвольной матрицы A размером $n \times n$ докажите включения:

1) $F_1 + G_1 \subset F_2 + G_2$;
2) $\lambda F_1 \subset \lambda F_2$;
3) $AF_1 \subset AF_2$.

5. Найдите образ множества

$$F = \{x \in E^2 : \ |x^1| \leqslant 1, \ |x^2| \leqslant 1\}$$

при линейных преобразованиях A следующего вида:

$$1) \ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}; \qquad 2) \ A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix};$$

$$3) \ A = \begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}.$$

6. Найдите расстояние $h(F, G)$ между множеством

$$F = \{x \in E^2 : \ |x^1| \leqslant 1, \ |x^2| \leqslant 1\}$$

и множествами $G \in \Omega(E^n)$ следующего вида:

1) $G = S_r(0)$. При каком r это расстояние минимально?

2) $G = \{g\}$. При каком g это расстояние минимально?

7. Найдите расстояние $h(F, G)$ между двумя произвольными шарами $F = S_{r_1}(a_1)$ и $G = S_{r_2}(a_2)$ в пространстве E^n.

8. Найдите расстояние $h(F, G)$ между множествами

$$F = \left\{x \in E^2 : \ \left(\frac{x^1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{b}\right)^2 \leqslant 1\right\}, \quad a \neq 0, \ b \neq 0;$$

$$G = \left\{x \in E^2 : \ \left(\frac{x^1}{c}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{d}\right)^2 \leqslant 1\right\}, \quad c \neq 0, \ d \neq 0.$$

ЛЕКЦИЯ 3

- *Опорная функция и ее основные свойства.*
- *Опорный вектор, опорное множество, опорная гиперплоскость.*
- *Выпуклая оболочка множества.*

3.1. Опорные функции

Пусть задано некоторое множество $F \in \Omega(E^n)$. *Опорной функцией* множества F называется скалярная функция $c(F, \boldsymbol{\psi})$ векторного аргумента $\boldsymbol{\psi} \in E^n$, определяемая условием

$$c(F, \boldsymbol{\psi}) = \max_{\boldsymbol{f} \in F} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle, \tag{3.1}$$

где $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{f} = (f^1, \dots, f^n)$ и $\boldsymbol{\psi} = (\psi^1, \dots, \psi^n)$, заданное формулой

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle = \sum_{i=1}^{n} f^i \psi^i.$$

Множество F также считается одним из аргументов функции $c(F, \boldsymbol{\psi})$. Зафиксируем множество F. Функция $c(F, \boldsymbol{\psi})$ как функция аргумента $\boldsymbol{\psi}$ отображает пространство E^n в числовую ось E^1. Запишем этот факт в виде символов следующим образом:

$$c(F, \cdot) : \; E^n \to E^1.$$

Ясно, что максимум в правой части равенства (3.1) достигается, так как скалярное произведение $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle$ непрерывно по $\boldsymbol{\psi}$, а множество F компактно. Пусть $\boldsymbol{\psi}_0 \in E^n$ — некоторый фиксированный вектор, а $\boldsymbol{f}_0$ — один из векторов множества F, на котором достигается максимум в определении опорной функции (3.1) для вектора $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_0$, т.е. выполняется равенство

$$\langle \boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{\psi}_0 \rangle = \max_{\boldsymbol{f} \in F} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_0 \rangle = c(F, \boldsymbol{\psi}_0). \tag{3.2}$$

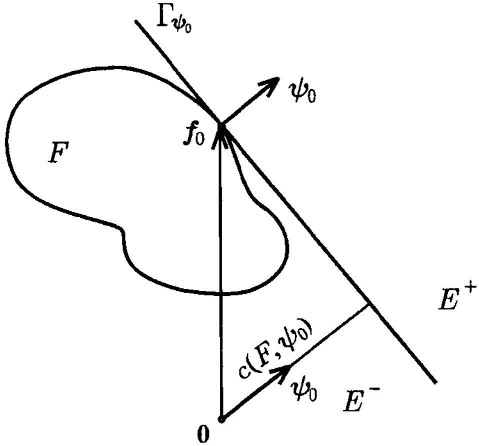


Рис. 6

В этом случае вектор $\boldsymbol{\psi}_0$ называется *опорным вектором* к множеству F в точке $\boldsymbol{f}_0$, а совокупность $\mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0)$ всех векторов $\boldsymbol{f}_0 \in F$, удовлетворяющих равенству (3.2), называется *опорным множеством* к множеству F в направлении вектора $\boldsymbol{\psi}_0$. Гиперплоскость Γ_{ψ_0} в пространстве E^n, определяемая соотношением

$$\Gamma_{\psi_0} = \{\boldsymbol{x} \in E^n : \ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\psi}_0 \rangle = \langle \boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{\psi}_0 \rangle\},$$

называется *опорной гиперплоскостью* к множеству F в направлении вектора $\boldsymbol{\psi}_0$ (рис. 6 и 7). Для опорного множества $\mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0)$ справедливо представление

$$\mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0) = F \cap \Gamma_{\psi_0}.$$

Гиперплоскость Γ_{ψ_0} разбивает все пространство E^n на два полупространства E^+ и E^-. Множество F лежит в отрицательном полупространстве E^- относительно вектора $\boldsymbol{\psi}_0$, так как для всех точек $\boldsymbol{f} \in F$ выполняется неравенство

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_0 \rangle \leqslant \langle \boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{\psi}_0 \rangle.$$

Если $\boldsymbol{\psi}_0 \in S$, т.е. вектор $\boldsymbol{\psi}_0$ имеет единичную длину, то величина $c(F, \boldsymbol{\psi}_0) = \langle \boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{\psi}_0 \rangle$ — расстояние от начала координат 0 до гиперплоскости Γ_{ψ_0}, взятое со знаком плюс, если начало координат лежит в отрицательном полупространстве E^- относительно вектора $\boldsymbol{\psi}_0$ (см. рис. 6), и со знаком минус, если начало

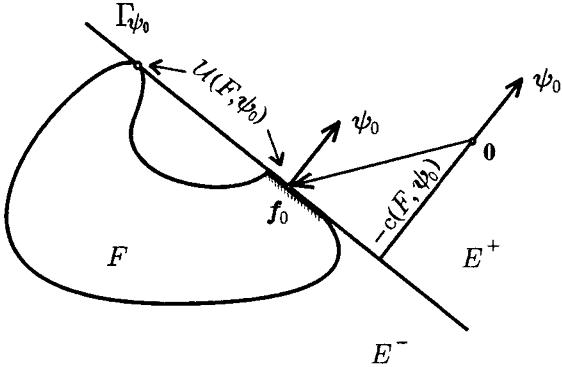


Рис. 7

координат лежит в положительном полупространстве E^+ (см. рис. 7). Таков геометрический смысл опорной функции.

Приведем несколько примеров нахождения опорных функций.

Пример 1. Пусть множество F состоит из единственной точки, т.е. $F = \{\boldsymbol{f}\}$. Тогда очевидно, что

$$c(\{\boldsymbol{f}\}, \boldsymbol{\psi}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle. \tag{3.3}$$

Пример 2. Вычислим опорную функцию единичного шара в пространстве E^n с центром в начале координат. Если $F = S_1(\mathbf{0})$, то ясно, что максимум в формуле (3.1) достигается на векторе $\boldsymbol{f}_0 = \frac{\boldsymbol{\psi}}{\|\boldsymbol{\psi}\|}$. Тогда имеем

$$c(S_1(\mathbf{0}), \boldsymbol{\psi}) = \langle \boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{\psi} \rangle = \left\langle \frac{\boldsymbol{\psi}}{\|\boldsymbol{\psi}\|}, \boldsymbol{\psi} \right\rangle = \|\boldsymbol{\psi}\|. \tag{3.4}$$

Пример 3. Вычислим опорную функцию квадрата F на плоскости E^2, заданного условием

$$F = \{\boldsymbol{x} \in E^2 : \ |x^1| \leqslant 1, \ |x^2| \leqslant 1\}.$$

Если вектор $\boldsymbol{\psi} = (\psi^1, \psi^2)$ принадлежит первому квадранту на плоскости E^2, т.е. $\psi^1 \geqslant 0$, $\psi^2 \geqslant 0$, то максимум в формуле (3.1) достигается на векторе $f^0 = (1, 1)$. Таким образом,

$$c(F, \boldsymbol{\psi}) = \langle \boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{\psi} \rangle = \psi^1 + \psi^2.$$

Далее, если вектор $\boldsymbol{\psi}$ принадлежит второму квадранту, т.е. $\psi^1 \leqslant 0$, $\psi^2 \geqslant 0$, то максимум в формуле (3.1) достигается на векторе $\boldsymbol{f}_0 = (-1, 1)$ и $c(F, \boldsymbol{\psi}) = -\psi^1 + \psi^2$. Аналогично для векторов $\boldsymbol{\psi}$ из третьего и четвертого квадрантов получаем соответствующие значения опорной функции $c(F, \boldsymbol{\psi}) = -\psi^1 - \psi^2$ и $c(F, \boldsymbol{\psi}) = \psi^1 - \psi^2$. Объединяя все выражения опорной функции, получаем окончательно

$$c(F, \boldsymbol{\psi}) = |\psi^1| + |\psi^2|. \tag{3.5}$$

3.2. Свойства опорных функций

Свойство 1. *Опорная функция $c(F, \cdot) : E^n \to E^1$ положительно однородна, т.е.*

$$c(F, \lambda\boldsymbol{\psi}) = \lambda c(F, \boldsymbol{\psi})$$

для любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in E^n$ и любого числа $\lambda \geqslant 0$. В частности, $c(F, \mathbf{0}) = 0$.

Доказательство этого свойства непосредственно следует из определения опорной функции (3.1) и свойств максимума. Действительно, справедливы равенства

$$c(F, \lambda\boldsymbol{\psi}) = \max_{\boldsymbol{f} \in F} \langle \boldsymbol{f}, \lambda\boldsymbol{\psi} \rangle = \lambda \max_{\boldsymbol{f} \in F} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle = \lambda c(F, \boldsymbol{\psi}).$$

Свойство 2. *Для любых двух векторов $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2 \in E^n$ опорная функция удовлетворяет неравенству*

$$c(F, \boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\psi}_2) \leqslant c(F, \boldsymbol{\psi}_1) + c(F, \boldsymbol{\psi}_2).$$

Доказательство этого свойства также выводится непосредственно из определения опорной функции и свойств максимума. Действительно, имеем

$$c(F, \boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\psi}_2) = \max_{\boldsymbol{f} \in F} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\psi}_2 \rangle \leqslant \max_{\boldsymbol{f} \in F} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_1 \rangle + \max_{\boldsymbol{f} \in F} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_2 \rangle = \\ = c(F, \boldsymbol{\psi}_1) + c(F, \boldsymbol{\psi}_2).$$

Функция $f : E^n \to E^1$ называется *выпуклой*, если для любых двух точек $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in E^n$ и любого числа $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ выполняется неравенство

$$f(\lambda\boldsymbol{x}_1 + (1 - \lambda)\boldsymbol{x}_2) \leqslant \lambda f(\boldsymbol{x}_1) + (1 - \lambda) f(\boldsymbol{x}_2).$$

Следствие свойств 1 и 2. *Опорная функция* $c(F,\cdot): E^n \to$ $\to E^1$ *является выпуклой.*

Действительно, из свойств 2 и 1 следует, что для любых двух векторов $\psi_1, \psi_2 \in E^n$ и любого числа $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ справедливо соотношение

$$c(F, \lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2) \leqslant c(F, \lambda\psi_1) + c(F, (1-\lambda)\psi_2) = \\ = \lambda c(F, \psi_1) + (1-\lambda)c(F, \psi_2).$$

Свойство 3. *Пусть $F, G \in \Omega(E^n)$. Тогда опорная функция $c(F+G, \psi)$ суммы $F+G$ равняется сумме двух опорных функций $c(F, \psi)$ и $c(G, \psi)$, т.е.*

$$c(F+G, \psi) = c(F, \psi) + c(G, \psi).$$

Доказательство. По определению суммы двух множеств (см. лекцию 2) имеем

$$F + G = \{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}: \ \boldsymbol{f} \in F, \ \boldsymbol{g} \in G\}.$$

Теперь воспользуемся определением опорной функции (3.1). Получаем

$$c(F+G) = \max_{\boldsymbol{x} \in F+G} \langle \boldsymbol{x}, \psi \rangle = \max_{\boldsymbol{f} \in F, \boldsymbol{g} \in G} \langle \boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}, \psi \rangle = \\ = \max_{\boldsymbol{f} \in F} \langle \boldsymbol{f}, \psi \rangle + \max_{\boldsymbol{g} \in G} \langle \boldsymbol{g}, \psi \rangle = c(F, \psi) + c(G, \psi).$$

Доказательство свойства 3 завершено.

Пусть теперь A — матрица размером $n \times n$, а $\boldsymbol{f} \in \Omega(E^n)$. Образ AF множества F при линейном преобразовании A определяется формулой (см. лекцию 2)

$$AF = \{\boldsymbol{x} \in E^n: \ \boldsymbol{x} = AF, \ \boldsymbol{f} \in F\}. \qquad (3.6)$$

Посмотрим, как выражается опорная функция образа множества F при линейном преобразовании.

Свойство 4. *Пусть A — матрица размером $n \times n$, а $F \in \Omega(E^n)$. Тогда*

$$c(AF, \psi) = c(F, A^*\psi),$$

где A^* — матрица, сопряженная с матрицей A.

Доказательство этого свойства непосредственно следует из определения опорной функции (3.1) и образа множества (3.6). Действительно,

$$c(AF, \psi) = \max_{x \in AF} \langle x, \psi \rangle = \max_{f \in F} \langle Af, \psi \rangle = \max_{f \in F} \langle f, A^* \psi \rangle.$$

Свойство 5. *Пусть $F \in \Omega(E^n)$, а λ — произвольное число. Тогда*

$$c(\lambda F, \psi) = c(F, \lambda \psi).$$

Это свойство является частным случаем свойства 4, когда матрица A имеет вид $A = \lambda E$, где E — единичная матрица размером $n \times n$.

Следствие. *Опорная функция $c(F, \psi)$ положительно однородна по первому аргументу F, т.е.*

$$c(\lambda F, \psi) = \lambda c(F, \psi)$$

для любого числа $\lambda \geqslant 0$.

Для доказательства этого следствия достаточно воспользоваться свойством 1.

Пример 4. Вычислим опорную функцию произвольного шара $S_r(a)$ в пространстве E^n. В лекции 2 было показано, что шар $S_r(a)$ можно представить в виде

$$S_r(a) = \{a\} + rS_1(0).$$

Опорные функции множества $\{a\}$ и единичного шара $S_1(0)$ уже вычислены (см. формулы (3.3) и (3.4)). Используя свойство 3 и следствие свойства 5, получаем

$$c(S_r(a), \psi) = c(\{a\} + rS_1(0), \psi) = c(\{a\}, \psi) + rc(S_1(0), \psi) = \\ = \langle a, \psi \rangle + r\|\psi\|.$$

Пример 5. Вычислим опорную функцию произвольного прямоугольника G на плоскости E^2 со сторонами, параллельными осям координат. Пусть этот прямоугольник задан в виде

$$G = \{x \in E^2 : \ a^1 \leqslant x^1 \leqslant b^1, \ a^2 \leqslant x^2 \leqslant b^2\}.$$

Получим прямоугольник G из квадрата

$$F = \{x \in E^2 : \ |x^1| \leqslant 1, \ |x^2| \leqslant 1\},$$

данного в примере 3, при помощи соответствующего сдвига и линейного преобразования (растяжения). Тогда справедливо равенство

$$G = \left\{ \left(\frac{b^1 + a^1}{2}, \frac{b^2 + a^2}{2} \right) \right\} + \begin{pmatrix} \frac{b^1 - a^1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b^2 - a^2}{2} \end{pmatrix} F.$$

Далее согласно свойствам 3 и 4 и формулам (3.3) и (3.5) имеем

$$c(G, \psi) = \frac{b^1 + a^1}{2}\psi^1 + \frac{b^2 + a^2}{2}\psi^2 + \frac{b^1 - a^1}{2}|\psi^1| + \frac{b^2 - a^2}{2}|\psi^2|.$$

Свойство 6. *Пусть $G, F \in \Omega(E^n)$. Если выполняется включение $G \subset F$, то для любого вектора $\psi \in E^n$ справедливо неравенство*

$$c(G, \psi) \leqslant c(F, \psi).$$

Доказательство непосредственно следует из определения опорной функции (3.1). Действительно, имеем

$$c(G, \psi) = \max_{g \in G} \langle g, \psi \rangle \leqslant \max_{f \in F} \langle f, \psi \rangle = c(F, \psi).$$

Следствие. *Пусть $F \in \Omega(E^n)$. Если точка f_0 принадлежит множеству F, т.е. $f_0 \in F$, то для любого вектора $\psi \in E^n$ выполняется неравенство*

$$\langle f_0, \psi \rangle \leqslant c(F, \psi).$$

Для получения этого следствия достаточно положить $G = \{f_0\}$.

Для вывода дальнейших свойств опорных функций необходимо знание некоторых свойств выпуклой оболочки множества $\operatorname{conv} F$.

3.3. Выпуклая оболочка множества

Множество $F \subset E^n$ называется выпуклым (см. лекцию 2), если для любых двух точек $x_1, x_2 \in F$ отрезок, соединяющий эти точки, содержится в множестве F, или, что то же самое, если для любого числа $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ выполняется условие $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in F$. Ясно, что пересечение любого числа выпуклых множеств снова будет множеством выпуклым.

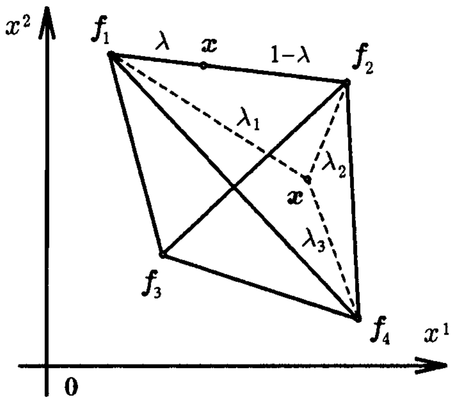


Рис. 8

Выпуклой оболочкой $\operatorname{conv} F$ называется наименьшее выпуклое множество, содержащее множество F. Ясно, что $\operatorname{conv} F$ есть пересечение всех выпуклых множеств, содержащих множество F. Если множество F выпукло, то $\operatorname{conv} F = F$.

Оказывается, если n — размерность пространства E^n, то выпуклая оболочка $\operatorname{conv} F$ множества $F \subset E^n$ совпадает с совокупностью всех точек вида

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_{n+1} \boldsymbol{x}_{n+1}, \qquad \boldsymbol{x}_i \in F, \quad \lambda_i \geqslant 0,$$
$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1. \quad (3.7)$$

В этом случае говорят, что точка $\boldsymbol{x}$ является *выпуклой комбинацией* точек $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n+1}$. Доказательство этого факта приведено в разд. Д1 (см. дополнения). В выпуклом анализе он известен как теорема Каратеодори.

Пример 6. Пусть $n = 2$ и множество $F \subset E^2$ состоит из четырех различных точек $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4$ (рис. 8). Выпуклой оболочкой множества F в этом случае является четырехугольник с вершинами $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4$. Если бы мы соединили все точки множества F между собой отрезками, то получили бы стороны четырехугольника и его диагонали. Произвольная точка из внутренности четырехугольника может быть получена лишь как выпуклая комбинация

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{x}_3, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geqslant 0,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \quad (3.8)$$

трех точек множества F. Совокупность точек (3.8) описывает треугольник с вершинами $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$. Любую точку четырехугольника можно представить в виде (3.8), т.е. как точку треугольника с вершинами из множества F.

Воспользуемся представлением (3.7) для доказательства следующего утверждения.

Лемма 1. *Если множество* $F \in \Omega(E^n)$, *то и* $\operatorname{conv} F \in \Omega(E^n)$, *т.е. выпуклая оболочка непустого компактного множества также является множеством непустым и компактным.*

Доказательство. Пусть $F \in \Omega(E^n)$. Непустота множества $\operatorname{conv} F$ следует из включения $F \in \operatorname{conv} F$. Так как множество F ограничено, то существует такое число $r \geqslant 0$, что $F \subset S_r(0)$. Шар $S_r(0)$ есть множество выпуклое, следовательно, по определению выпуклой оболочки, $\operatorname{conv} F \subset S_r(0)$, т.е. множество $\operatorname{conv} F$ ограничено.

Остается доказать замкнутость множества $\operatorname{conv} F$. Воспользуемся для этого компактностью множества F и применим стандартный прием выделения сходящейся подпоследовательности. Пусть последовательность точек $\{y_k\}$, $y_k \in \operatorname{conv} F$ сходится к точке y. Каждая точка y_k представима в виде

$$y_k = \lambda_1^k x_1^k + \ldots + \lambda_{n+1}^k x_{n+1}^k, \quad x_i^k \in F, \quad \lambda_i^k \geqslant 0,$$
$$\lambda_1^k + \ldots + \lambda_{n+1}^k = 1. \qquad (3.9)$$

Точки x_1^k принадлежат компактному множеству F. Выделим из последовательности $\{x_1^k\}$ подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $x_1 \in F$. Выбросим из соотношений (3.9) все точки с индексами k, не входящими в эту подпоследовательность, а оставшиеся точки снова обозначим через y_k, $k = 1, 2, \ldots$ Так как $0 \leqslant \lambda_1^k \leqslant 1$, то с последовательностью $\{\lambda_1^k\}$ поступим аналогичным образом. В результате окажется, что $\lambda_1^k \to \lambda_1$. Повторяя эту процедуру для каждого $i = 1, \ldots, n+1$ и переходя к пределу при $k \to \infty$ в соотношении (3.9), в итоге для предельной точки y получим следующее представление:

$$y = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n+1} x_{n+1}, \quad x_i \in F, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1.$$

Следовательно, точка y является выпуклой комбинацией точек $x_i \in F$, и поэтому $y \in \operatorname{conv} F$. Лемма доказана.

3.4. Свойства опорных функций (продолжение)

Пусть $F \in \Omega(E^n)$. По лемме 1 в этом случае $\operatorname{conv} F \in \Omega(E^n)$, т.е. для множества $\operatorname{conv} F$ можно определить опорную функцию $c(\operatorname{conv} F, \psi)$.

Свойство 7. *Пусть $F \in \Omega(E^n)$. Тогда опорные функции множеств* $\operatorname{conv} F$ *и F совпадают, т.е.*

$$c(\operatorname{conv} F, \boldsymbol{\psi}) = c(F, \boldsymbol{\psi}).$$

Доказательство. Так как $F \subset \operatorname{conv} F$, то из свойства 6 следует, что $c(F, \boldsymbol{\psi}) \leqslant c(\operatorname{conv} F, \boldsymbol{\psi})$. Для получения неравенства в другую сторону воспользуемся тем фактом, что выпуклая оболочка $\operatorname{conv} F$ состоит из всех точек вида (3.7). Тогда

$$\begin{aligned}
c(\operatorname{conv} F, \boldsymbol{\psi}) &= \max_{\boldsymbol{x} \in \operatorname{conv} F} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\psi} \rangle = \\
&= \max_{\substack{\boldsymbol{x}_i \in F,\ \lambda_i \geqslant 0, \\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1}} \langle \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_{n+1} \boldsymbol{x}_{n+1}, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant \\
&\leqslant \lambda_1 \max_{\boldsymbol{x}_1 \in F} \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{\psi} \rangle + \ldots + \lambda_{n+1} \max_{\boldsymbol{x}_{n+1} \in F} \langle \boldsymbol{x}_{n+1}, \boldsymbol{\psi} \rangle = \\
&\qquad = (\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1})\, c(F, \boldsymbol{\psi}).
\end{aligned}$$

Полученные неравенства доказывают свойство 7.

Для произвольного множества $F \in \Omega(E^n)$ мы определили опорную функцию $c(F, \boldsymbol{\psi})$. Естественно возникает вопрос, а можно ли, зная опорную функцию $c(F, \boldsymbol{\psi})$, восстановить само множество F? Оказывается, зная опорную функцию $c(F, \boldsymbol{\psi})$, можно восстановить лишь выпуклую оболочку $\operatorname{conv} F$ множества F и, следовательно, восстановить множество F, если оно выпукло.

Свойство 8. *Пусть заданы множество $F \in \Omega(E^n)$ и его опорная функция $c(F, \boldsymbol{\psi})$. Тогда выпуклая оболочка* $\operatorname{conv} F$ *множества F представляется в виде*

$$\operatorname{conv} F = \bigcap_{\boldsymbol{\psi} \in S} \{\boldsymbol{f} \in E^n : \ \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant c(F, \boldsymbol{\psi})\}. \tag{3.10}$$

Геометрический смысл свойства 8 состоит в том, что выпуклая оболочка $\operatorname{conv} F$ равняется пересечению замкнутых полупространств, содержащих множество F. Это следует из геометрического смысла опорной функции.

Доказательство. Пусть точка $\boldsymbol{g}$ принадлежит множеству $\operatorname{conv} F$. Тогда согласно следствию из свойства 6, а также свойству 7 имеем

$$\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant c(\operatorname{conv} F, \boldsymbol{\psi}) = c(F, \boldsymbol{\psi})$$

для любого вектора $\psi \in E^n$, в частности, для $\psi \in S$. Следовательно, точка g принадлежит правой части соотношения (3.10).

Пусть теперь $g \notin \operatorname{conv} F$. Множество $\operatorname{conv} F$ выпукло и компактно, и точка g ему не принадлежит. Тогда найдется вектор $\psi_0 \in S$ (рис. 9) такой, что выполняется строгое неравенство

$$c(\operatorname{conv} F, \psi_0) < \langle g, \psi_0 \rangle.$$

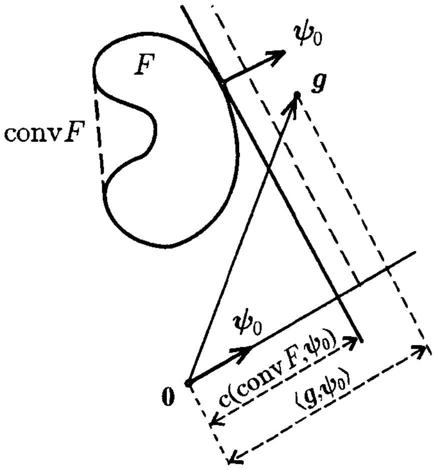


Рис. 9

В этом случае говорят, что *гиперплоскость* Γ_{ψ_0} *строго отделяет* точку g от множества $\operatorname{conv} F$. Геометрически этот факт представляется совершенно очевидным, хотя и требует аккуратного аналитического доказательства, которое приведено в разделе Д2 (см. дополнения). Из последнего неравенства согласно свойству 7 получаем

$$c(F, \psi_0) < \langle g, \psi_0 \rangle.$$

Таким образом, для данного вектора $\psi_0 \in S$ соответствующее полупространство в фигурных скобках в правой части соотношения (3.10) не содержит точки g. Тем более не содержит ее и пересечение всех этих полупространств, т.е. точка g не принадлежит правой части соотношения (3.10). Свойство 8 доказано.

В дальнейшем, имея какие-либо соотношения для множеств, будем получать соответствующие соотношения для опорных функций. Обратно, из соотношений для опорных функций можно получать аналогичные соотношения лишь для выпуклых оболочек множеств. Это обстоятельство характерно проявляется в ряде свойств, приведенных ниже.

Свойство 9. *Пусть $F \in \Omega(E^n)$, $f \in E^n$. Если для любого вектора $\psi \in S$ выполняется неравенство*

$$\langle f, \psi \rangle \leqslant c(F, \psi), \tag{3.11}$$

то точка f принадлежит выпуклой оболочке $\operatorname{conv} F$ *множества F.*

Доказательство. Пусть неравенство (3.11) выполняется для любого вектора $\psi \in S$. Тогда точка $\boldsymbol{f}$ принадлежит множеству, стоящему в правой части соотношения (3.11). Следовательно, согласно свойству 8 имеем включение $\boldsymbol{f} \in \operatorname{conv} F$.

Следствие. *Пусть множество $F \in \Omega(E^n)$ выпукло. В таком случае точка $\boldsymbol{f}$ принадлежит множеству F тогда и только тогда, когда выполняется неравенство* (3.11) *для любого вектора $\psi \in S$.*

Для доказательства этого следствия достаточно воспользоваться свойством 9 и следствием свойства 6.

Заметим, что если множество F невыпукло, то из выполнения соотношения (3.11), вообще говоря, не следует, что $\boldsymbol{f} \in F$.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 7. Пусть множество F — единичная сфера в пространстве E^n, т.е. $F = S$, а $\boldsymbol{f} = 0$. Тогда $\langle \boldsymbol{f}, \psi\rangle = 0$, а $c(F, \psi) = \|\psi\|$. Таким образом, соотношение (3.11) выполняется, так как $0 \leqslant \|\psi\|$, но $\mathbf{0} \notin S$.

Свойство 10. *Пусть $G, F \in \Omega(E^n)$. Если для любого вектора $\psi \in S$ выполняется неравенство*

$$c(G, \psi) \leqslant c(F, \psi), \tag{3.12}$$

то справедливо включение $G \subset \operatorname{conv} F$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $G \not\subset \operatorname{conv} F$. Это означает, что существует точка $\boldsymbol{g} \in G$ такая, что $\boldsymbol{g} \notin \operatorname{conv} F$. Множество $\operatorname{conv} F$ выпукло, поэтому согласно следствию из свойства 9 существует вектор $\psi_0 \in S$ такой, что

$$\langle \boldsymbol{g}, \psi_0\rangle > c(\operatorname{conv} F, \psi_0) = c(F, \psi_0).$$

Из включения $\boldsymbol{g} \in G$, пользуясь следствием из свойства 6, получим неравенство

$$\langle \boldsymbol{g}, \psi_0\rangle \leqslant c(G, \psi_0).$$

Из двух последних неравенств следует, что

$$c(G, \psi_0) > c(F, \psi_0),$$

а это противоречит неравенству (3.12). Следовательно, свойство 10 доказано.

Замечание. Так как множество $\operatorname{conv} F$ выпукло, то из включения $G \subset \operatorname{conv} F$ следует включение $\operatorname{conv} G \subset \operatorname{conv} F$. Поэтому если выполняется неравенство (3.12) для любого вектора $\psi \in S$, то справедливо включение $\operatorname{conv} G \subset \operatorname{conv} F$.

Следствие. *Пусть $G, F \in \Omega(E^n)$ и множество F выпукло. Тогда включение $G \subset F$ справедливо тогда и только тогда, когда для любого вектора $\psi \in S$ выполняется неравенство* (3.12).

Доказательство очевидным образом следует из свойств 10 и 6.

Свойство 11. *Пусть $G, F \in \Omega(E^n)$. Если множества F и G равны, т.е. $F = G$, то их опорные функции совпадают, $c(F, \psi) = c(G, \psi)$. Наоборот, если опорные функции $c(F, \psi)$ и $c(G, \psi)$ совпадают, то* $\operatorname{conv} F = \operatorname{conv} G$.

Доказательство. Первое утверждение очевидным образом следует из определения опорной функции (3.1), а второе — из свойства 10. Действительно, разбивая равенство $c(F, \psi) = c(G, \psi)$ на два неравенства вида (3.12), получим два включения

$$G \subset \operatorname{conv} F, \qquad F \subset \operatorname{conv} G$$

и, следовательно, равенство $\operatorname{conv} F = \operatorname{conv} G$. Свойство 11 доказано.

Следствие. *Выпуклые множества $F, G \in \Omega(E^n)$ равны тогда и только тогда, когда их опорные функции совпадают.*

Это следствие будем в дальнейшем использовать для нахождения множества по опорной функции. Оно означает также, что выпуклое множество $F \in \Omega(E^n)$ можно однозначно восстановить по его опорной функции $c(F, \psi)$.

Таким образом, получаем взаимно однозначное соответствие между выпуклыми компактными множествами и их опорными функциями. При этом для любого свойства выпуклого множества или совокупности выпуклых множеств имеется аналогичное свойство для опорных функций. Поэтому опорную функцию можно рассматривать как способ описания выпуклых множеств, который во многих случаях более предпочтителен. Например, выпуклое компактное множество достаточно сложного вида вообще нереально ввести в ЭВМ из-за невозможности ввода всех точек этого множества. В то же время с разумной степенью точности можно в табличной форме ввести соответствующую опорную функцию и вместо множеств иметь дело с опорными функциями.

Далее, оказывается, что по виду произвольной функции $c(\psi)\colon E^n \to E^1$ можно сразу сказать, будет она опорной к какому-либо множеству или нет. Если функция не принимает бесконечных значений и удовлетворяет свойствам 1 и 2, то она является опорной функцией некоторого множества $F \in \in \operatorname{conv} \Omega(E^n)$, т.е. $c(\psi) = c(F, \psi)$. При этом множество F легко восстанавливается по функции $c(\psi)$. Этот факт не будет использован при исследовании линейной задачи быстродействия, но он показывает эффективность применения опорных функций и аккуратно доказан в разделе Д4 (см. дополнения).

Понятие опорной функции можно ввести и исследовать соответствующие ее свойства и для неограниченных замкнутых выпуклых множеств [2]. Но это уже выходит за рамки данной книги.

Пример 8. Выпуклое множество $F \in \Omega(E^n)$ имеет опорную функцию

$$c(F, \psi) = 5\psi^1 + 2\psi^2 + 3\|\psi\|.$$

Как следует из примера 4, такую же опорную функцию имеет шар $S_r(a)$ с центром в точке $a = (5, 2)$ радиуса $r = 3$. Таким образом, по следствию свойства 11 множество F совпадает с этим шаром.

Пример 9. Докажем, что для любых двух множеств $F, G \in \in \Omega(E^n)$, любой матрицы A размером $n \times n$ и любого числа λ выполняются равенства

$$\operatorname{conv}(F + G) = \operatorname{conv} F + \operatorname{conv} G,$$
$$\operatorname{conv}(AF) = A \operatorname{conv} F,$$
$$\operatorname{conv}(\lambda F) = \lambda \operatorname{conv} F.$$

Множества в левой и правой частях этих соотношений являются выпуклыми, а их опорные функции совпадают согласно свойству 7 и свойствам 3, 4 и 5, соответственно. Следовательно, в силу следствия из свойства 11 эти множества также совпадают.

Свойство 12. *Пусть $F, G \in \Omega(E^n)$. Если множества F и G пересекаются, т.е. $F \cap G \neq \emptyset$, то для любого вектора $\psi \in E^n$ выполняется неравенство*

$$c(F, \psi) + c(G, -\psi) \geqslant 0. \tag{3.13}$$

Наоборот, если выполняется соотношение (3.13) *для любого вектора $\psi \in S$, то* $\operatorname{conv} F \cap \operatorname{conv} G \neq \emptyset$.

Доказательство. Покажем сначала, что множества F и пересекаются тогда и только тогда, когда выполнено включени

$$\mathbf{0} \in F + (-1)G. \qquad (3.1$$

Действительно, пусть $F \cap G \neq \emptyset$ и $\boldsymbol{x} \in F \cap G$. Тогда $\boldsymbol{x} \in$ и $\boldsymbol{x} \in G$, т.е. $-\boldsymbol{x} \in (-1)G$. Таким образом, $\mathbf{0} = \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) \in F$ $+ (-1)G$. Наоборот, пусть $\mathbf{0} \in F + (-1)G$. Тогда по определени суммы множеств $\mathbf{0} = \boldsymbol{f} + (-1)\boldsymbol{g}$, где $\boldsymbol{f} \in F$, $\boldsymbol{g} \in G$. Таки образом, $\boldsymbol{f} \in F$ и $\boldsymbol{g} \in G$, т.е. $F \cap G \neq \emptyset$.

Пусть теперь $F, G \in \Omega(E^n)$ и $F \cap G \neq \emptyset$. Применяя к соотн шению (3.13) следствие из свойства 6, получим

$$0 = \langle \mathbf{0}, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant c(F + (-1)G, \boldsymbol{\psi}).$$

Откуда согласно свойствам 3 и 5 следует неравенство

$$0 \leqslant c(F, \boldsymbol{\psi}) + c(G, -\boldsymbol{\psi}),$$

т.е. соотношение (3.13) выполнено.

Пусть теперь выполняется соотношение (3.13). Тогда с гласно свойствам 3 и 5 имеем

$$c(F + (-1)G, \boldsymbol{\psi}) = c(F, \boldsymbol{\psi}) + c(G, -\boldsymbol{\psi}) \geqslant 0.$$

Откуда, используя свойство 9, находим

$$\mathbf{0} \in \operatorname{conv}(F + (-1)G) = \operatorname{conv} F + (-1)\operatorname{conv} G.$$

В результате согласно формуле (3.14) имеем $\operatorname{conv} F \cap \operatorname{conv} G \neq$

Таким образом, свойство 12 доказано полностью.

Следствие. *Два выпуклых множества $F, G \in \Omega(E^n)$ пер секаются тогда и только тогда, когда неравенство*

$$c(F, \boldsymbol{\psi}) + c(G, -\boldsymbol{\psi}) \geqslant 0$$

выполняется для любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in S$.

Свойство 13. *Опорная функция $c(F, \boldsymbol{\psi})$ для любых дв множеств $F, F_0 \in \Omega(E^n)$ и любых двух векторов $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}_0 \in E$ удовлетворяет неравенству*

$$|c(F, \boldsymbol{\psi}) - c(F_0, \boldsymbol{\psi}_0)| \leqslant \|\boldsymbol{\psi}_0\| h(F, F_0) + \|F_0\| \cdot \|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_0\| + \\ + 2h(F, F_0)\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_0\|. \qquad (3.1$$

Доказательство. Пусть $F, F_0 \in \Omega(E^n)$ — два произвольных множества, а ψ, ψ_0 — два произвольных вектора из пространства E^n. Из свойства 2 опорных функций следует неравенство

$$c(F,\psi) = c(F,\psi - \psi_0 + \psi_0) \leqslant c(F,\psi - \psi_0) + c(F,\psi_0). \quad (3.16)$$

По определению модуля множества $|F|$ и хаусдорфова расстояния $h(F, F_0)$ (см. лекцию 2) справедливы включения

$$F \subset S_{|F|}(0), \quad F \subset F_0 + S_{h(F,F_0)}(0).$$

Применяя свойство 6 к этим включениям для векторов $\psi - \psi_0$ и ψ_0 соответственно, получаем неравенства

$$c(F,\psi-\psi_0) \leqslant |F|\cdot\|\psi-\psi_0\|, \quad c(F,\psi_0) \leqslant c(F_0,\psi_0)+h(F,F_0)\|\psi_0\|.$$

Подставляя эти неравенства в неравенство (3.16) и перенося $c(F_0, \psi_0)$ в левую часть, получаем соотношение

$$c(F,\psi) - c(F_0,\psi_0) \leqslant |F|\cdot\|\psi - \psi_0\| + h(F,F_0)\|\psi_0\|.$$

Поскольку множества F, F_0 и векторы ψ, ψ_0 произвольны, перемена их местами не изменяет полученного неравенства. Таким образом, имеем также неравенство

$$c(F_0,\psi_0) - c(F,\psi) \leqslant |F_0|\cdot\|\psi_0 - \psi\| + h(F_0,F)\|\psi\|.$$

Из двух последних неравенств следует соотношение

$$|c(F,\psi) - c(F_0,\psi_0)| \leqslant \|\psi - \psi_0\| \max(|F|,|F_0|) + \\ + h(F,F_0)\max(\|\psi\|,\|\psi_0\|).$$

Оценим в этом соотношении $\|\psi\|$ и $|F|$ следующими величинами:

$$\|\psi\| = \|\psi - \psi_0 + \psi_0\| \leqslant \|\psi - \psi_0\| + \|\psi_0\|,$$
$$|F| = h(F,\{0\}) \leqslant h(F,F_0) + h(F,\{0\}) = h(F,F_0) + |F_0|.$$

Тогда имеем неравенства

$$\max(\|\psi\|,\|\psi_0\|) \leqslant \|\psi_0\| + \|\psi - \psi_0\|,$$

$$\max(|F|,|F_0|) \leqslant |F_0| + h(F,F_0).$$

Подставляя их в неравенство (3.16), получаем нужное неравенство (3.15). Тем самым свойство 13 доказано.

Из этого свойства сразу следует непрерывность опорной функции $c(F, \psi)$.

Непрерывность опорной функции $c(F, \cdot) : E^n \to E^1$ по переменной ψ в точке $\psi_0 \in E^n$ означает, что если точка ψ стремится к точке ψ_0, то значение функции $c(F, \psi)$ стремится к значению $c(F, \psi_0)$. Таким образом, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что при $\|\psi - \psi_0\| \leqslant \delta$ выполняется неравенство

$$|c(F, \psi) - c(F, \psi_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Непрерывность опорной функции $c(\cdot, \psi) : \Omega(E^n) \to E^1$ по переменной F в точке $F_0 \in \Omega(E^n)$ означает, что если точка F стремится к точке F_0, то значение $c(F, \psi)$ стремится к значению $c(F_0, \psi)$. Таким образом, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что при $h(F, F_0) \leqslant \delta$ выполняется неравенство

$$|c(F, \psi) - c(F_0, \psi)| \leqslant \varepsilon.$$

Непрерывность опорной функции $c(F, \psi)$ по совокупности переменных F, ψ в точке (F_0, ψ_0) означает, что если F стремится к F_0 и одновременно ψ стремится к ψ_0, то значение $c(F, \psi)$ стремится к значению $c(F_0, \psi_0)$. Таким образом, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при

$$h(F, F_0) \leqslant \delta, \qquad \|\psi - \psi_0\| \leqslant \delta$$

выполняется неравенство

$$|c(F, \psi) - c(F_0, \psi_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Из выражения (3.15) следует, что последнее неравенство будет выполнено, если по заданному числу $\varepsilon > 0$ выбрать число $\delta > 0$, удовлетворяющее соотношению

$$\|\psi_0\|\delta + |F_0|\delta + 2\delta^2 \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали следующее следствие из свойства 13.

Следствие. *Опорная функция $c(F, \psi)$ непрерывна по совокупности переменных F, ψ в любой точке (F_0, ψ_0) и, следовательно, непрерывна по каждой из переменных F и ψ в отдельности.*

Свойство 14. *Пусть $F \in \Omega(E^n)$. Если точка $\boldsymbol{f}$ является внутренней точкой множества F, т.е. $\boldsymbol{f} \in \operatorname{int} F$, то для любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in S$ выполняется неравенство*

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle < c(F, \boldsymbol{\psi}). \tag{3.17}$$

Наоборот, если соотношение (3.17) *выполняется для любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in S$, то $\boldsymbol{f} \in \operatorname{int} \operatorname{conv} F$.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{f} \in \operatorname{int} F$. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $S_\varepsilon(\boldsymbol{f}) \subset F$. Откуда согласно свойству 6 следует, что неравенство

$$c(S_\varepsilon(\boldsymbol{f}), \boldsymbol{\psi}) \leqslant c(F, \boldsymbol{\psi})$$

выполняется для любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in S$. Подставив в полученное неравенство выражение опорной функции шара $S_\varepsilon(\boldsymbol{f})$, приходим к неравенству

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle + \varepsilon \|\boldsymbol{\psi}\| \leqslant c(F, \boldsymbol{\psi}).$$

Поэтому соотношение (3.17) верно для всех векторов $\boldsymbol{\psi} \in S$. Пусть теперь неравенство (3.17) выполняется для любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in S$. Поскольку опорная функция $c(F, \boldsymbol{\psi})$ непрерывна по $\boldsymbol{\psi}$ (следствие из свойства 13), то функция $c(F, \boldsymbol{\psi}) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle$ непрерывна по $\boldsymbol{\psi}$ и положительна для всех векторов $\boldsymbol{\psi} \in S$. Минимум этой непрерывной функции на компактном множестве S достигается и положителен. Обозначим его через ε. Таким образом, неравенство

$$c(F, \boldsymbol{\psi}) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle \geqslant \varepsilon > 0$$

справедливо для всех векторов $\boldsymbol{\psi} \in S$, т.е.

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle + \varepsilon \|\boldsymbol{\psi}\| \leqslant c(F, \boldsymbol{\psi}).$$

Перепишем это неравенство в виде

$$c(S_\varepsilon(\boldsymbol{f}), \boldsymbol{\psi}) \leqslant c(F, \boldsymbol{\psi}).$$

conv

Согласно свойству 10 отсюда следует включение $S_\varepsilon(\boldsymbol{f}) \subset F$. Это и означает, что $\boldsymbol{f}$ является внутренней точкой множества $\operatorname{conv} F$.

Следствие. *Точка $\boldsymbol{f}$ принадлежит внутренности выпуклого множества $F \in \Omega(E^n)$ тогда и только тогда, когда неравенство* (3.17) *справедливо для любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in S$.*

 св-во 10 : $S_\varepsilon(f) \subset \operatorname{conv} F$

Свойство 15. *Пусть заданы два множества* $F, G \in \Omega(E^n)$. *Тогда справедливо соотношение*

$$h(\operatorname{conv} F, \operatorname{conv} G) = \max_{\psi \in S} |c(F, \psi) - c(G, \psi)| \leqslant h(F, G). \qquad (3.18)$$

Доказательство. Неравенство в этом соотношении непосредственно следует из свойства 13. Действительно, для любого вектора $\psi \in S$ имеем

$$|c(F, \psi) - c(G, \psi)| \leqslant h(F, G),$$

следовательно, справедливо неравенство

$$\max_{\psi \in S} |c(F, \psi) - c(G, \psi)| \leqslant h(F, G).$$

Хаусдорфово расстояние определяется выражением

$$h(\operatorname{conv} F, \operatorname{conv} G) = \min \{r \geqslant 0 : \ \operatorname{conv} F \subset \operatorname{conv} G + S_r(0),$$
$$\operatorname{conv} F \subset \operatorname{conv} G + S_r(0)\}.$$

Множества $\operatorname{conv} F$, $\operatorname{conv} G$ выпуклы и их опорные функции $c(\operatorname{conv} F, \psi)$, $c(\operatorname{conv} G, \psi)$ совпадают с $c(F, \psi)$, $c(G, \psi)$ в силу свойства 7, поэтому включения в фигурных скобках можно записать в эквивалентной форме в виде неравенств. Согласно следствию из свойства 10 имеем

$$h(\operatorname{conv} F, \operatorname{conv} G) = \min \{r \geqslant 0 : \ c(F, \psi) \leqslant c(G, \psi) + r,$$
$$c(G, \psi) \leqslant c(F, \psi) + r, \ \psi \in S\} =$$
$$= \min \{r \geqslant 0 : \ |c(F, \psi) - c(G, \psi)| \leqslant r, \ \psi \in S\} =$$
$$= \max_{\psi \in S} |c(F, \psi) - c(G, \psi)|.$$

Следовательно, свойство 15 доказано.

Следствие. *Для выпуклых множеств* $F, G \in \Omega(E^n)$ *справедливо равенство*

$$h(F, G) = \max_{\psi \in S} |c(F, \psi) - c(G, \psi)|. \qquad (3.19)$$

Заметим, что если множества F и G не являются выпуклыми, то в формуле (3.18) может быть строгое неравенство. Приведем пример.

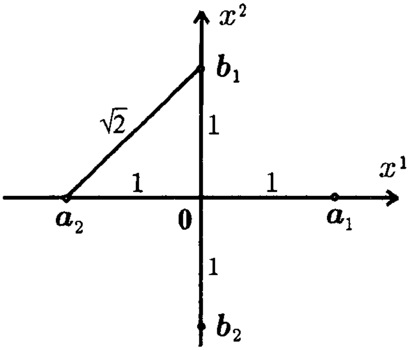


Рис. 10

Пример 10. Пусть $n = 2$, множество F состоит из двух точек $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0)$ и $\boldsymbol{a}_2 = (-1, 0)$, а множество G состоит из двух точек $\boldsymbol{b}_1 = (0, 1)$ и $\boldsymbol{b}_2 = (0, -1)$ (рис. 10). Тогда непосредственно можно проверить, что $h(F, G) = \sqrt{2}$. С другой стороны, $c(F, \boldsymbol{\psi}) = |\boldsymbol{\psi}^1|$, $c(G, \boldsymbol{\psi}) = |\psi^2|$. Таким образом,

$$\max_{\psi \in S} |c(F, \boldsymbol{\psi}) - c(G, \boldsymbol{\psi})| = \max_{\psi \in S} ||\psi^1| - |\psi^2|| = 1 < \sqrt{2} = h(F, G).$$

Следующий пример показывает, как, используя формулу (3.19), найти хаусдорфово расстояние между множествами.

Пример 11. Найдем хаусдорфово расстояние между произвольными шарами $S_{r_1}(\boldsymbol{a}_1)$ и $S_{r_2}(\boldsymbol{a}_2)$. Воспользовавшись формулой (3.19), имеем равенства

$$h(S_{r_1}(\boldsymbol{a}_1), S_{r_2}(\boldsymbol{a}_2)) = \max_{\psi \in S} |\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{\psi} \rangle + r_1 \|\boldsymbol{\psi}\| - \langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{\psi} \rangle - r_2 \|\boldsymbol{\psi}\|| =$$
$$= \max_{\psi \in S} |\langle \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{\psi} \rangle + r_1 - r_2|.$$

Нетрудно показать, что максимум в последнем выражении достигается на векторе

$$\boldsymbol{\psi} = \operatorname{sign}(r_1 - r_2) \frac{\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2}{\|\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2\|} \in S,$$

если $\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{a}_2$, и на любом векторе $\boldsymbol{\psi} \in S$, если $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2$. Таким образом, окончательно имеем формулу

$$h(S_{r_1}(\boldsymbol{a}_1), S_{r_2}(\boldsymbol{a}_2)) = \|\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2\| + |r_1 - r_2|.$$

3.5. Задачи

1. Найдите опорную функцию n-мерного куба

$$F = \{\boldsymbol{x} \in E^n : |x^i| \leqslant 1, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

2. Найдите опорную функцию произвольного n-мерного параллелепипеда G с ребрами, параллельными осям координат,

$$G = \{\boldsymbol{x} \in E^n : \ a^i \leqslant x^i \leqslant b^i, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

3. Найдите опорную функцию множества F, заданного на плоскости формулой

$$F = \{\boldsymbol{x} \in E^2 : \ |x^1 + x^2| \leqslant 1, \ |x^1 - x^2| \leqslant 1\}.$$

4. Найдите опорную функцию эллипса, заданного на плоскости E^2 уравнением

$$\left(\frac{x^1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{b}\right)^2 = 1, \quad a, b \neq 0.$$

5. Найдите опорную функцию множества

$$F = \left\{\boldsymbol{x} \in E^2 : \ \left(\frac{x^1 - a}{c}\right)^2 + \left(\frac{x^2 - b}{d}\right)^2 \leqslant 1\right\}, \quad c, d \neq 0.$$

6. Найдите опорную функцию множества

$$F = \{\boldsymbol{x} \in E^2 : \ \langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \leqslant 1\},$$

где A — симметричная положительно определенная матрица размером 2×2.

7*. Найдите опорную функцию множества

$$F = \left\{\boldsymbol{x} \in E^2 : \ \left|\frac{x^1}{a}\right|^p + \left|\frac{x^2}{b}\right|^p \leqslant 1\right\}, \quad a, b \neq 0,$$

где p — некоторое число, $p > 1$.

8. Найдите опорную функцию множества

$$F = S_2((0, 2)) \cup S_2((0, -2)).$$

9. Найдите опорную функцию n-мерного эллипсоида

$$F = \left\{\boldsymbol{x} \in E^n : \ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x^i}{a^i}\right)^2 \leqslant 1\right\}, \quad a^i \neq 0.$$

10. Восстановите множество $F \in \Omega(E^2)$ по его опорной функции
$$c(F, \boldsymbol{\psi}) = |\psi^1 - \psi^2|.$$

11. Найдите с помощью свойства 12 условия, при которых два произвольных шара $S_{r_1}(\boldsymbol{a}_1)$ и $S_{r_2}(\boldsymbol{a}_2)$ имеют непустое пересечение.

12. Найдите опорную функцию объединения двух множеств $F \cup G$.

13*. Найдите опорную функцию пересечения двух множеств $F \cap G$.

14*. Размерностью множества $F \in \Omega(E^n)$ назовем размерность минимального линейного многообразия, содержащего множество F. Найдите размерность множества F с помощью его опорной функции $c(F, \boldsymbol{\psi})$.

15. Найдите радиус минимального шара, содержащего множество F.

16. Найдите радиус максимального шара, вписанного в выпуклое множество F.

17. Диаметром множества F называется число
$$d(F) = \max_{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \in F} \|\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2\|.$$
Найдите диаметр множества F через его опорную функцию $c(F, \boldsymbol{\psi})$.

18. Евклидово расстояние между множествами F и G определяется формулой
$$\rho(F, G) = \min_{\boldsymbol{f} \in F,\ \boldsymbol{g} \in G} \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}\|.$$
Найдите евклидово расстояние $\rho(F, G)$ между выпуклыми множествами $F, G \in \Omega(E^n)$ через их опорные функции.

19. Найдите евклидово расстояние $\rho(\boldsymbol{p}, G)$ от точки $\boldsymbol{p} \in E^n$ до выпуклого множества $F \in \Omega(E^n)$.

20. Докажите, что для любых точек $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in E^n$ и любых множеств $F, G \in \Omega(E^n)$ выполняются неравенства
$$\rho(\boldsymbol{p}, F) \leqslant \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}\| + \rho(\boldsymbol{q}, F), \qquad \rho(\boldsymbol{p}, F) \leqslant \rho(\boldsymbol{p}, G) + h(G, F).$$

21. Докажите, что для любого множества $F \in \Omega(E^n)$ и любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in S$ выполняется неравенство
$$|c(F, \boldsymbol{\psi})| \leqslant |F| \cdot \|\boldsymbol{\psi}\|.$$

22. Выразите модуль $|F|$ множества F через опорную функцию $c(F, \boldsymbol{\psi})$.

ЛЕКЦИЯ 4

- *Измеримые функции.*
- *Многозначные отображения.*
- *Свойства непрерывных многозначных отображений.*
- *Непрерывные и измеримые однозначные ветви многозначных отображений.*

4.1. Измеримые функции

До сих пор мы имели дело лишь с классом непрерывных функций. Однако в математической теории оптимального управления приходится рассматривать более широкий класс функций. Отчасти это объясняется незамкнутостью пространства непрерывных функций относительно поточечной сходимости, т.е. тем обстоятельством, что поточечный предел последовательности непрерывных функций может уже не быть непрерывной функцией. Поясним это на примере.

Пример 1. Рассмотрим последовательность непрерывных функций $f_k : E^1 \to E^1$, определенных на отрезке времени $[0, t^*]$ следующими условиями

$$f_k(t) = \begin{cases} +1, & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{t^*}{2}, \\ -\frac{2^{k+1}}{t^*}t + 2^k + 1, & \text{если} \quad \frac{t^*}{2} < t \leqslant (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^k})t^*, \\ -1, & \text{если} \quad (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^k})t^* < t \leqslant t^*. \end{cases}$$

Графики этих функций изображены на рис. 11.

Ясно, что для любого $t \in [0, t^*]$ последовательность $f_k(t)$ сходится к некоторому значению $f(t)$. Эта предельная функция $f(t)$ уже не непрерывна, а имеет разрыв при $t = \frac{t^*}{2}$. Функция $f(t)$ определяется соотношением

$$f(t) = \begin{cases} +1, & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{t^*}{2}, \\ -1, & \text{если} \quad \frac{t^*}{2} < t \leqslant t^*. \end{cases} \tag{4.1}$$

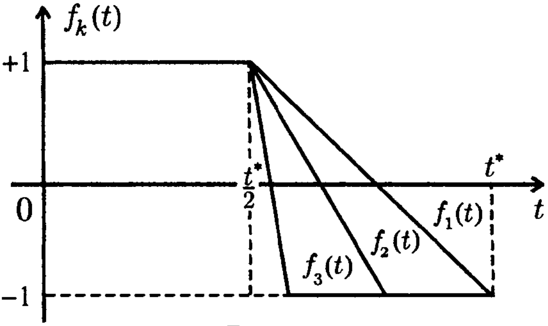


Рис. 11

Таким образом, поточечный предел последовательности непрерывных функций уже может быть функцией разрывной. Желательно ввести такое пространство функций, чтобы предел любой последовательности функций этого пространства также ему принадлежал.

Покажем на примере, почему в теории оптимального управления не удается обойтись классом непрерывных функций. Оказывается, что даже в простейших задачах оптимального управления функция управления $u(t)$ может оказаться разрывной.

Пример 2. Рассмотрим поезд, движущийся от станции A к станции B в соответствии с уравнением

$$\ddot{x} = u,$$

где x — расстояние от станции A до поезда; u — тяга поезда, которой можно управлять, т. е. выбирать ее как функцию времени $u(t)$. На величину тяги $u(t)$ наложено ограничение $|u(t)| \leqslant 1$. Расстояние между станциями A и B задано. Требуется так выбирать управление $u(t)$, чтобы поезд преодолел путь между станциями за наименьшее время t^*. При этом, конечно, имеется в виду, что скорость поезда в начальный и конечный моменты времени должна быть нулевой, т.е. $\dot{x}(0) = \dot{x}(t^*) = 0$.

Нетрудно сообразить, что время перехода будет минимальным, когда поезд до половины пути разгоняется с максимальным ускорением, т.е. $u(t) = +1$, а вторую половину пути максимально затормаживается, т.е. $u(t) = -1$. Таким образом, оптимальное управление $u^*(t)$ в данном случае имеет вид

$$u^*(t) = \begin{cases} +1, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \frac{t^*}{2}, \\ -1, & \text{если } \frac{t^*}{2} < t \leqslant t^*, \end{cases}$$

т.е. является функцией разрывной. Эта функция $u^*(t)$ совпадает с функцией $f(t)$ из примера 1 (см. формулу (4.1)), которая была получена как предел последовательности непрерывных функций.

Таким образом, оптимальное управление $u^*(t)$ в примере 2 оказалось функцией не непрерывной, а разрывной. Более широким классом функций является класс кусочно непрерывных функций D.

Функция $f : E^1 \to E^n$ называется *кусочно непрерывной* на отрезке времени $[t_0, t_1]$, если она непрерывна во всех точках этого отрезка, кроме конечного числа точек $\tau_1, \ldots, \tau_k$, а в этих точках существуют конечные пределы функции $f(t)$ и слева и справа. Если C — класс всех непрерывных функций, то ясно, что $C \subset D$.

Оптимальное управление $u^*(t)$ в примере 2 является кусочно непрерывной функцией на отрезке времени $[0, 1]$ с одной точкой разрыва $\tau = \frac{1}{2}$. Однако даже в линейной задаче быстродействия (см. лекцию 1) оптимальное управление $u^*(t)$ может иметь счетное число точек разрыва. Более того, множество точек разрыва может быть еще более сложного вида. В общем случае оптимальное управление является функцией измеримой.

Функция $f : E^1 \to E^n$ называется *измеримой* на отрезке $[t_0, t_1]$, если она является поточечным пределом некоторой последовательности $f_k(t)$ непрерывных функций, т.е. если при всех $t \in [t_0, t_1]$ выполняется соотношение

$$f(t) = \lim_{k\to\infty} f_k(t).$$

Если L — класс всех измеримых функций, то, очевидно, справедливы включения $C \subset D \subset L$.

Приведенное определение измеримой функции не является общепринятым в математическом анализе. Обычно оно дается другим способом и опирается на понятие измеримого множества. Использованное нами в качестве определения соотношение служит при этом критерием измеримости. Читателям, желающим ознакомиться с этими понятиями, рекомендуется прочитать раздел Д6 (см. дополнения), где даны аккуратные определения и приведены те свойства измеримых функций, которые необходимы для строгого построения математической теории оптимального управления. Однако при первом знакомстве с теорией оптимального управления этот материал можно пропус-

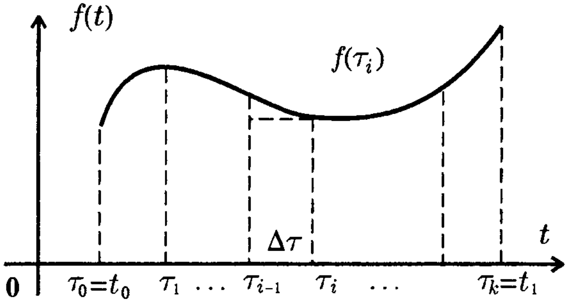


Рис. 12

тить и, встречая в тексте слова "измеримая функция", представлять себе, что имеете дело с кусочно непрерывной функцией. При этом не все теоремы будут справедливы (соответствующие замечания в книге даны).

Для непрерывной или кусочно непрерывной функции $\boldsymbol{f}: E^1 \to E^n$ в математическом анализе хорошо известно понятие интеграла $\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(t)dt$. Обычно его называют *интегралом Римана* и определяют соотношением

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(t)dt = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{f}(\tau_i)\Delta\tau,$$

где $\Delta\tau = \frac{t_1 - t_0}{k}$, а точки $\tau_i = t_0 + i\Delta\tau$, $i = 0, 1, \ldots, k$ разбивают отрезок на k равных частей (рис. 12).

Для измеримой функции $\boldsymbol{f}(t)$ такой интеграл может не существовать, но понятие интеграла можно распространить и на измеримые функции. Такой интеграл называют *интегралом Лебега* и строят по другой схеме. Соответствующие аккуратные построения приведены в разделе Д6 (см. дополнения).

Оказывается, что если функция $\boldsymbol{f}(t)$ кусочно непрерывна, то ее интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана. Поэтому при первом знакомстве с теорией оптимального управления измеримые функции можно представлять себе как кусочно непрерывные, а интеграл Лебега — интегралом Римана.

4.2. Многозначные отображения

Многозначным отображением будем называть произвольную функцию $F : E^1 \to \Omega(E^n)$, т.е. функцию, аргументом

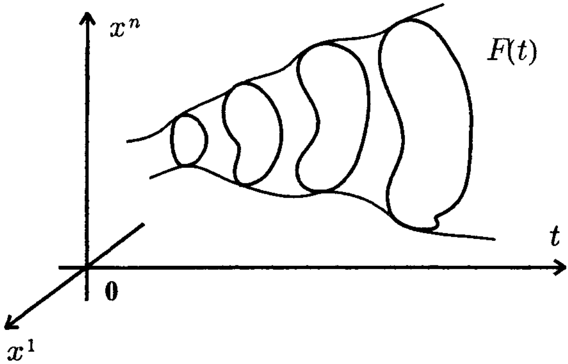


Рис. 13

которой является время $t \in E^1$, а значениями — элементы пространства $\Omega(E^n)$, т.е. непустые компактные множества из пространства E^n. Таким образом, непустое компактное множество $F(t)$ движется со временем t, возможно при этом както деформируясь (рис. 13). Так как пространства E^1 и $\Omega(E^n)$ метрические (см. лекцию 2), то можно говорить о непрерывности многозначного отображения. Многозначное отображение $F(t)$ *непрерывно в точке* t_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что неравенство $h(F(t), F(t_0)) \leqslant \varepsilon$ выполняется, как только $|t-t_0| \leqslant \delta$, т.е. $h(F(t), F(t_0)) \to 0$ при $|t-t_0| \to 0$. По определению хаусдорфова расстояния (см. лекцию 2) это означает, что многозначное отображение $F(t)$ непрерывно в точке t_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при всех $|t-t_0| \leqslant \delta$ выполняются одновременно следующие два включения:

$$F(t) \subset F(t_0) + S_\varepsilon(0), \quad F(t_0) \subset F(t) + S_\varepsilon(0). \tag{4.2}$$

Многозначное отображение $F(t)$ *непрерывно*, если оно непрерывно в любой точке $t_0 \in E^1$.

Пример 3. Рассмотрим многозначное отображение $F\colon E^1 \to \Omega(E^1)$, определяемое соотношением $F(t) = \{0\}$ при $t \leqslant 0$ и $F(t) = t\{-1, 1\}$ при $t > 0$. Это отображение является однозначным при $t \leqslant 0$ и множество $F(t)$ при $t > 0$ состоит из двух точек $\{-t, t\}$. График этого отображения показан на рис. 14. Многозначное отображение $F(t)$ непрерывно. Действительно, при $t \leqslant 0$ непрерывность функции $F(t)$ в точке t_0 очевидна. Пусть $t > 0$. Тогда при достаточно малых значениях $|t-t_0|$ множества $F(t_0)$ и $F(t)$ имеют вид $F(t_0) = \{-t_0, t_0\}$, $F(t) = \{-t, t\}$.

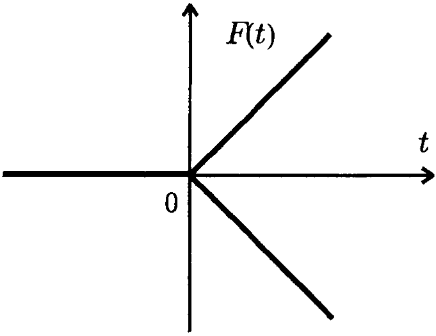


Рис. 14

Хаусдорфовым расстоянием между ними (см. лекцию 2) будет число $h(F(t), F(t_0)) = |t - t_0|$. Следовательно, $h(F(t), F(t_0)) \to 0$ при $|t - t_0| \to 0$, т.е. отображение $F(t)$ непрерывно.

Покажем, что алгебраическая сумма $H(t) = F(t) + G(t)$ двух непрерывных многозначных отображений $F(t)$ и $G(t)$ является отображением непрерывным. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и точку $t_0 \in E^1$. Покажем, что при малых отклонениях t от t_0 для отображения выполняются два включения вида (4.2). Из непрерывности отображений $F(t)$ и $G(t)$ следует существование $\delta > 0$ такого, что при всех $|t - t_0| \leqslant \delta$ выполняются следующие включения:

$$F(t) \subset F(t_0) + S_{\varepsilon/2}(\mathbf{0}), \quad F(t_0) \subset F(t) + S_{\varepsilon/2}(\mathbf{0}),$$

$$G(t) \subset G(t_0) + S_{\varepsilon/2}(\mathbf{0}), \quad G(t_0) \subset G(t) + S_{\varepsilon/2}(\mathbf{0}).$$

Просуммировав эти множества попарно, получим для отображения $H(t) = F(t) + G(t)$ включения:

$$H(t) \subset H(t_0) + S_{\varepsilon}(\mathbf{0}), \quad H(t_0) \subset H(t) + S_{\varepsilon}(\mathbf{0})$$

при всех $|t - t_0| \leqslant \delta$, т.е. отображение $H(t)$ непрерывно.

Пусть $F \in \Omega(E^n)$, а $A(t)$ — матрица размером $n \times n$, все элементы которой $a_{ij}(t)$ — непрерывные функции. Покажем, что многозначное отображение $F(t) = A(t)F$ непрерывно. Для этого зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и точку $t_0 \in E^1$ и покажем, что при малых отклонениях t от t_0 выполняются включения (4.2).

Напомним, что нормой матрицы A называется величина

$$\|A\| = \max_{\boldsymbol{x} \in S_1(\mathbf{0})} \|A\boldsymbol{x}\|.$$

Таким образом, всегда справедлива оценка $\|A\boldsymbol{x}\| \leqslant \|A\| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$. Если все элементы матрицы $A(t)$ суть непрерывные функции, то и норма матрицы $A(t)$

$$\|A(t)\| = \max_{\boldsymbol{x} \in S_1(0)} \|A(t)\boldsymbol{x}\|$$

— функция непрерывная.

Покажем, что при $|t - t_0| \leqslant \delta$ выполняется неравенство

$$A(t)F \subset A(t_0)F + S_\varepsilon(\mathbf{0}). \tag{4.3}$$

Возьмем произвольную точку $\boldsymbol{x} \in A(t)F$. Она имеет представление $\boldsymbol{x} = A(t)\boldsymbol{f}$, где $\boldsymbol{f} \in F$. Точка $\boldsymbol{x}_0 = A(t_0)\boldsymbol{f}$ очевидно принадлежит множеству $A(t_0)F$. Если мы докажем неравенство $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant \varepsilon$, то включение (4.3) будет выполнено. Имеем соотношение

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| = \|A(t)\boldsymbol{f} - A(t_0)\boldsymbol{f}\| = \|[A(t) - A(t_0)]\boldsymbol{f}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A(t) - A(t_0)\| \cdot \|\boldsymbol{f}\| \leqslant \|A(t) - A(t_0)\| \cdot |F|.$$

В силу непрерывности нормы $\|A(t)\|$ существует $\delta > 0$ такое, что при всех $|t - t_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$\|A(t) - A(t_0)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{|F|},$$

следовательно, $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant \varepsilon$ и включение (4.3) доказано.

Таким же способом доказывается и включение

$$A(t_0)F \subset A(t)F + S_\varepsilon(\mathbf{0}).$$

Выполнение этих двух включений означает непрерывность отображения $A(t)F$ в точке t_0 (см. формулу (4.2)).

Пусть задано многозначное отображение $F : E^1 \to \Omega(E^n)$. Поскольку множество $F(t)$ есть непустой компакт, для него можно определить опорную функцию $c(F(t), \boldsymbol{\psi})$. Если многозначное отображение $F(t)$ зафиксировано, то опорная функция $c(F(t), \boldsymbol{\psi})$ становится функцией двух аргументов t и $\boldsymbol{\psi}$, т.е. $c(F(t), \boldsymbol{\psi}) : E^1 \times E^n \to E^1$.

Теорема 1. *Пусть $F : E^1 \to \Omega(E^n)$ есть непрерывное многозначное отображение. Тогда опорная функция $c(F(t), \boldsymbol{\psi})$ непрерывна по t при каждом фиксированном значении $\boldsymbol{\psi} \in E^n$. Наоборот, если функция $c(F(t), \boldsymbol{\psi})$ непрерывна по t при каждом фиксированном значении $\boldsymbol{\psi} \in E^n$, то многозначное отображение $\mathrm{conv}\,F(t)$ непрерывно.*

Доказательство. Пусть многозначное отображение F: $E^1 \to \Omega(E^n)$ непрерывно. Покажем, что опорная функция

$c(F(t), \psi)$ непрерывна по совокупности аргументов t, ψ. Действительно, из свойства 13 опорных функций (см. лекцию 3) следует неравенство

$$|c(F(t), \psi) - c(F(t_0), \psi_0)| \leqslant \|\psi_0\| \, h(F(t), F(t_0)) + \\ + \|F(t_0)\| \cdot \|\psi - \psi_0\| + 2h(F(t), F(t_0)) \, \|\psi - \psi_0\|,$$

правая часть которого стремится к нулю при $t \to t_0$, $\psi \to \psi_0$.

Покажем теперь, что если опорная функция $c(F(t), \psi)$ непрерывна по совокупности аргументов t, ψ, то многозначное отображение $\operatorname{conv} F(t)$ непрерывно. Согласно свойству 15 опорных функций имеем равенство

$$h(\operatorname{conv} F(t), \operatorname{conv} F(t_0)) = \max_{\psi \in S} |c(F(t), \psi) - c(F(t_0), \psi)|.$$

Докажем, что правая часть этого равенства стремится к нулю при $t \to t_0$. Допустим противное, т.е. пусть существуют такое число $\varepsilon_0 > 0$ и такая последовательность точек $t_k \to t_0$, что

$$\max_{\psi \in S} |c(F(t), \psi) - c(F(t_0), \psi)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Это означает, что существуют точки $\psi_k \in S$ такие, что

$$|c(F(t_k), \psi_k) - c(F(t_0), \psi_k)| \geqslant \varepsilon_0. \tag{4.4}$$

Выделим из последовательности $\{\psi_k\}$ подпоследовательность, сходящуюся к точке $\psi_0 \in S$, и снова обозначим ее через $\{\psi_k\}$. Применяя свойство 13 опорных функций, получаем неравенство

$$|c(F(t_k), \psi_k) - c(F(t_0), \psi_k)| \leqslant \\ \leqslant |c(F(t_k), \psi_k) - c(F(t_0), \psi_0)| + |c(F(t_0), \psi_0) - c(F(t_0), \psi_k)| \leqslant \\ \leqslant |c(F(t_k), \psi_k) - c(F(t_0), \psi_0)| + \|F(t_0)\| \cdot \|\psi_k - \psi_0\|.$$

В силу непрерывности функции $c(F(t), \psi)$ по t, ψ правая часть этого неравенства стремится к нулю при $t_k \to t_0$, $\psi_k \to \psi_0$. Это противоречит неравенству (4.4).

Для завершения доказательства теоремы остается только показать, что непрерывность опорной функции $c(F(t), \psi)$ по совокупности аргументов t, ψ эквивалентна непрерывности по t для каждого фиксированного вектора $\psi \in E^n$. Для произвольной функции от двух аргументов это, конечно, неверно. Пусть опорная функция $c(F(t), \psi)$ непрерывна по t. Согласно свойству 13 опорных функций имеем неравенство

$$\begin{aligned}|c(F(t),\psi) - c(F(t_0),\psi_0)| &\leqslant \\ \leqslant |c(F(t),\psi) - c(F(t),\psi_0)| &+ |c(F(t),\psi_0) - c(F(t_0),\psi_0)| \leqslant \\ &\leqslant |F(t)|\cdot\|\psi-\psi_0\| + |c(F(t),\psi_0) - c(F(t_0),\psi_0)|.\end{aligned}$$

Если показать, что величина $|F(t)|$ ограничена при $t \to t_0$, то тогда правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $t \to t_0$, $\psi \to \psi_0$, и функция $c(F(t), \psi)$ непрерывна по совокупности аргументов t, ψ.

Предположим противное, т.е. пусть существует такая последовательность точек $t_k \to t_0$, что $|F_k(t)| \to \infty$. По определению модуля множества $|F|$ (см. лекцию 2) и следствию из свойства 10 опорных функций справедливы неравенства

$$\begin{aligned}|F| = \min\{r:\ F \subset S_r(0)\} &= \\ = \min\{r:\ c(F(t),\psi) \leqslant c(S_r(0),\psi) = r,\ \psi \in S\} &= \\ &= \max_{\psi\in S} c(F(t),\psi). \quad (4.5)\end{aligned}$$

Таким образом, существуют векторы $\psi_k \in S$ такие, что

$$|F(t_k)| = c(F(t_k), \psi_k). \tag{4.6}$$

Выделим из последовательности $\{\psi_k\}$ подпоследовательность, сходящуюся к точке $\psi_0 \in S$, и снова обозначим ее через $\{\psi_k\}$. Из свойства 13 опорных функций следует неравенство

$$c(F(t_k),\psi_k) - c(F(t_k),\psi_0) \leqslant |F(t_k)|\cdot\|\psi_k - \psi_0\|,$$

откуда, учитывая равенство (4.6), получаем соотношение

$$|F(t_k)|(1 - \|\psi_k - \psi_0\|) \leqslant c(F(t_k),\psi_0).$$

Поскольку функция $c(F(t), \psi_0)$ непрерывна по t, из этого соотношения следует ограниченность последовательности $|F(t_k)|$, а это противоречит сделанному предположению. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть многозначное отображение* $F : E^1 \to \to \Omega(E^n)$ *таково, что множества* $F(t)$ *выпуклы при всех*

$t \in E^1$. В этом случае многозначное отображение непрерывно тогда и только тогда, когда опорная функция $c(F(t), \psi)$ непрерывна по t при каждом фиксированном $\psi \in S$.

Пример 4. Рассмотрим многозначное отображение $F : E^1 \to \Omega(E^1)$, заданное условием $F(t) = \{1\}$ при $t > 0$, $F(t) = \{-1\}$ при $t < 0$ и $F(0) = [-1, 1]$. График этого отображения показан на рис. 15.

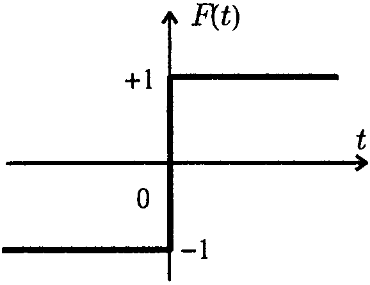


Рис. 15

Очевидно, что во всех точках $t \neq 0$ это отображение непрерывно. Множество $F(t)$ выпукло при всех $\psi \in S$, и его опорная функция имеет вид

$$c(F(t), \psi) = \begin{cases} -\psi, & \text{если} \quad t < 0, \\ |\psi|, & \text{если} \quad t = 0, \\ \psi, & \text{если} \quad t > 0. \end{cases}$$

Например, при $\psi = 1$ эта функция претерпевает разрыв в точке $t_0 = 0$. Таким образом, в силу следствия из теоремы 1 многозначное отображение $F(t)$ не является непрерывным в точке $t = 0$.

Пример 5. Рассмотрим многозначное отображение $F: E^1 \to \Omega(E^1)$, заданное условием $F(t) = [-1, 1]$ при $t \neq 0$ и $F(0) = \{0\}$. График этого отображения приведен на рис. 16.

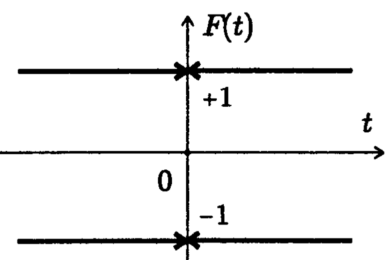


Рис. 16

Очевидно, что во всех точках $t \neq 0$ это отображение непрерывно. Множество $F(t)$ выпукло при всех $t \in E^1$, и его опорная функция имеет вид

$$c(F(t), \psi) = \begin{cases} |\psi|, & \text{если} \quad t \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad t = 0. \end{cases}$$

Например, для $\psi = 1$ эта функция имеет разрыв в точке $t_0 = 0$. Таким образом, многозначное отображение $F(t)$ не является непрерывным в точке t_0 согласно следствию из теоремы 1.

Функция $f : E^1 \to E^n$ называется *однозначной ветвью* многозначного отображения $F : E^1 \to \Omega(E^n)$, если при всех

$t \in E^1$ выполняется включение $f(t) \in F(t)$. Ясно, что однозначная ветвь $f(t)$ всегда существует, поскольку множество $F(t)$ непусто при всех $t \in E^n$.

Нас будут интересовать такие однозначные ветви $f(t)$, которые можно проинтегрировать на заданном отрезке $[t_0, t_1]$, т.е. для которых существует интеграл $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$. Здесь можно было бы ограничиться непрерывными ветвями $f(t)$ и интеграл понимать в смысле Римана. Непрерывные однозначные ветви можно выделять для достаточно широкого класса многозначных отображений $F(t)$. Так, в примере 3 существуют две непрерывные однозначные ветви

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ t, & t > 0; \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ -t, & t > 0. \end{cases}$$

В примере 5 непрерывных ветвей существует много. Например, функции $f(t) \equiv 0$, $f(t) = \sin t$ являются даже гладкими однозначными ветвями. Однако в примере 4 не существует непрерывной однозначной ветви $f(t)$ у многозначного отображения $F(t)$. Любая ветвь должна иметь разрыв в точке $t = 0$. Но многозначное отображение в примере 4 само не является непрерывным. Оказывается, что если даже многозначное отображение непрерывно, то у него может не существовать ни одной непрерывной однозначной ветви. Приведем соответствующий пример.

Пример 6. Рассмотрим многозначное отображение F: $[0,1] \to \Omega(E^2)$, заданное условием

$$F(t) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \lg t) \\ \sin(\alpha + \lg t) \end{pmatrix} : \ t \leqslant \alpha \leqslant 2\pi \right\}$$

при $0 < t \leqslant 1$ и $F(0) = S$. При $t \neq 0$ множество $F(t)$ представляет собой часть дуги на единичной окружности в плоскости E^2 (рис. 17). При этом множеству $F(t)$ не хватает до всей окружности S дуги с центральным углом в t радиан и начало этой выброшенной части дуги имеет угол, равный $\lg t$. Таким образом, при $t \to 0$ длина выброшенной части дуги стремится к нулю, но ее начало стремится к $-\infty$. Отображение $F(t)$ непрерывно на отрезке $[0, 1]$. Любая однозначная ветвь $f(t) \in F(t)$ должна при $t \to 0$ совершать бесконечное число оборотов по окружности S, иначе она пересечет выброшенную часть дуги и уже не будет

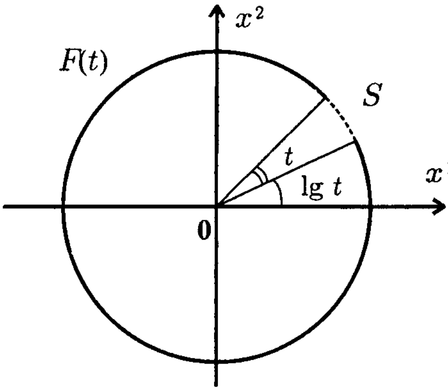


Рис. 17

ветвью. Но такая функция $\boldsymbol{f}(t)$ не имеет предела при $t \to 0$. Следовательно, у отображения $F(t)$ нет ни одной непрерывной однозначной ветви.

Отсутствие непрерывной ветви у отображения $F(t)$ в этом примере объясняется тем, что множество $F(t)$ было невыпукло при $t > 0$. Но именно такая ситуация часто встречается в задачах оптимального управления.

Приведенные соображения наводят на мысль рассматривать измеримые однозначные ветви и интегрировать их в смысле Лебега. Оказывается, что у непрерывного многозначного отображения уже всегда существует измеримая ветвь. Сформулируем это в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть многозначное отображение $F : I \to \to \Omega(E^n)$ непрерывно на отрезке $I = [t_0, t_1]$. Тогда у него существует измеримая на этом отрезке I однозначная ветвь $\boldsymbol{f}(t) \in F(t)$. Более того, если $\boldsymbol{\psi} \in S$ — произвольный фиксированный вектор, то существует измеримая ветвь $\boldsymbol{f}(t)$ такая, что при всех $t \in I$ выполняется включение*

$$\boldsymbol{f}(t) \in \mathcal{U}(F(t), \boldsymbol{\psi}),$$

т.е. измеримая ветвь $\boldsymbol{f}(t)$ при всех $t \in I$ принадлежит опорному множеству $\mathcal{U}(F(t), \boldsymbol{\psi})$ в направлении $\boldsymbol{\psi} \in S$.

Доказательство теоремы 2 приводится в разделе Д7 (см. дополнения, следствие 2 к теореме 1)

4.3. Задачи

1. Докажите, что многозначное отображение $F : E^1 \to \to \Omega(E^n)$, определяемое условием

$$F(t) = \begin{cases} S_{r(t)}(\boldsymbol{a}(t)), & \text{если} \quad t \neq 0, \\ \boldsymbol{0}, & \text{если} \quad t = 0, \end{cases}$$

непрерывно тогда и только тогда, когда функции $r : E^1 \to E^1$ и $\boldsymbol{a} : E^1 \to E^n$ непрерывны.

2. Будет ли многозначное отображение $F = t \cdot S_{\sin \frac{1}{t}}(\mathbf{0})$ непрерывным?

3. Докажите, что образ любого компактного множества $K \subset E^1$ при непрерывном многозначном отображении $F : E^1 \to \Omega(E^n)$, т.е. множество

$$F(K) = \bigcup_{t \in K} F(t)$$

является компактом в пространстве E^n.

4. Докажите, что прообраз любого открытого множества $P \subset E^n$ при непрерывном многозначном отображении $F : E^1 \to \Omega(E^n)$, т.е. множество

$$\{t \in E^1 : \ F(t) \subset P\}$$

является открытым в пространстве E^1.

5*. Многозначное отображение $F : E^1 \to \Omega(E^n)$ называется *полунепрерывным сверху в точке* t_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что при всех $|t - t_0| \leqslant \delta$ справедливо включение

$$F(t) \subset F(t_0) + S_\varepsilon(\mathbf{0}).$$

Докажите, что образ $F(K)$ любого компактного множества $K \subset E^1$ при полунепрерывном сверху отображении является компактом в E^n.

6*. Докажите, что график полунепрерывного сверху многозначного отображения $F : E^1 \to \Omega(E^n)$, т.е. множество

$$\{(t, \boldsymbol{x}) \in E^1 \times E^n : \ t \in E^1, \ \boldsymbol{x} \in F(t)\}$$

является замкнутым в пространстве $E^1 \times E^n$.

7*. Пусть многозначное отображение $F : E^1 \to \Omega(E^n)$ непрерывно и множество $F(t)$ выпукло при всех $t \in E^1$. Докажите, что существует непрерывная однозначная ветвь $\boldsymbol{f}(t)$ отображения $F(t)$.

8*. Пусть многозначное отображение $F : E^1 \to \Omega(E^n)$ непрерывно и множество $F(t)$ выпукло при всех $t \in E^1$. Далее, пусть заданы точки $t_0 \in E^1$, $\boldsymbol{x}_0 \in F(t_0)$. Докажите, что существует непрерывная однозначная ветвь $\boldsymbol{f}(t)$ отображения $F(t)$, удовлетворяющая условию $\boldsymbol{f}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$.

9*. Многозначное отображение $F : E^1 \to \Omega(E^n)$ называется *полунепрерывным снизу в точке* t_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что при всех $|t - t_0| \leqslant \delta$ справедливо включение

$$F(t_0) \subset F(t) + S_\varepsilon(\mathbf{0}).$$

Докажите, что если многозначное отображение $F : E^1 \to \Omega(E^n)$ полунепрерывно снизу и множество $F(t)$ выпукло при всех $t \in E^1$, то существует непрерывная однозначная ветвь $\boldsymbol{f}(t)$ отображения $F(t)$.

ЛЕКЦИЯ 5

- *Интеграл от многозначного отображения, его основные свойства.*
- *Теорема Ляпунова.*

5.1. Интегрирование многозначных отображений

Пусть заданы отрезок времени $I = [t_0, t_1]$ и некоторое отображение $F : I \to \Omega(E^n)$. *Интегралом* от многозначного отображения $F(t)$ на отрезке I называется множество

$$G = \int_{t_0}^{t_1} F(t)dt = \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(t)dt : \ \boldsymbol{f}(t) \in F(t) \right\}.$$

Здесь в правой части интеграл Лебега берется по всем однозначным ветвям отображения $F(t)$, для которых он существует. Ясно, что G является подмножеством пространства E^n.

Теорема 1. *Пусть многозначное отображение $F(t)$ непрерывно на отрезке $I = [t_0, t_1]$. Тогда интеграл от этого многозначного отображения является непустым компактным множеством в пространстве E^n, т.е.*

$$G = \int_{t_0}^{t_1} F(t)dt \in \Omega(E^n).$$

Более того, множество G выпукло.

Доказательство. Покажем, что в предположениях теоремы множество G непусто. Действительно, по теореме 2 (см. лекцию 4) существует хотя бы одна измеримая ветвь $\boldsymbol{f}(t)$ многозначного отображения $F(t)$. Для модуля множества $|F(t)|$ справедливо равенство (см. формулу (4.5))

$$|F(t)| = \max_{\boldsymbol{\psi} \in S} c(F(t), \boldsymbol{\psi}).$$

Поскольку отображение $F(t)$ непрерывно, его опорная функция $c(F(t), \psi)$ непрерывна по t (теорема 1, лекция 4), а следовательно, непрерывна и функция $|F(t)|$. Тогда она ограничена на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, т.е. $|F(t)| \leqslant k$ при всех $t \in I$. Таким образом, для измеримой ветви $\boldsymbol{f}(t)$ справедливо неравенство

$$\|\boldsymbol{f}(t)\| \leqslant |F(t)| \leqslant k. \tag{5.1}$$

Согласно свойству 8 интеграла Лебега (см. раздел Д6 дополнений) эта ветвь $\boldsymbol{f}(t)$ интегрируема и $\int_{t_0}^{t_1} F(t)dt \in G$, т.е. множество G непусто.

Покажем теперь, что множество G ограничено. Действительно, пусть $\boldsymbol{g} \in G$. Тогда $\boldsymbol{g} = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(t)\, dt$, где $\boldsymbol{f}(t)$ — некоторая ветвь многозначного отображения $F(t)$. Согласно свойству 3 интеграла Лебега (см. раздел Д6 дополнений) и соотношению (5.1) имеем

$$\|\boldsymbol{g}\| = \left\|\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(t)dt\right\| \leqslant \int_{t_0}^{t_1} \|\boldsymbol{f}(t)\|dt \leqslant \int_{t_0}^{t_1} k dt = k(t_1 - t_0) = l.$$

Таким образом, $G \subset S_l(0)$, т.е. множество G ограничено.

Для завершения доказательства теоремы остается доказать замкнутость и выпуклость множества G. Доказательство этих фактов приведено в разделе Д7 дополнений. Докажем только выпуклость G в частном случае, когда множество $F(t)$ выпукло при всех $t \in I$.

Пусть заданы точки $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2 \in G$ и число $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. По определению интеграла, существуют интегрируемые функции $\boldsymbol{f}_1(t)$ и $\boldsymbol{f}_2(t)$ такие, что

$$\boldsymbol{g}_1 = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}_1(t)dt, \qquad \boldsymbol{g}_2 = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}_2(t)dt,$$

и $\boldsymbol{f}_1(t) \in F(t)$, $\boldsymbol{f}_2(t) \in F(t)$. Согласно свойству 3 (см. раздел Д6 дополнений) интеграла Лебега имеем

$$\lambda \boldsymbol{g}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{g}_2 = \lambda \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}_1(t)dt + (1-\lambda) \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}_2(t)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} [\lambda \boldsymbol{f}_1(t) + (1-\lambda)\boldsymbol{f}_2(t)]dt.$$

Поскольку множество $F(t)$ выпукло при всех $t \in I$, то $\lambda \boldsymbol{f}_1(t) + (1-\lambda)\boldsymbol{f}_2(t) \in F(t)$ и, следовательно, $\lambda \boldsymbol{g}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{g}_2 \in G$, т.е. множество G выпукло. Теорема доказана.

Если даже ограничиться только непрерывными многозначными отображениями $F(t)$, у которых множества $F(t)$ выпуклы, то замкнутости интеграла может не быть, если этот интеграл брать в смысле Римана по всем кусочно непрерывным ветвям $\boldsymbol{f}(t)$ отображения $F(t)$. Замыкание получится, если добавить интегралы (теперь по Лебегу) по всем измеримым ветвям $\boldsymbol{f}(t) \in F(t)$.

Теорема 1 представляет собой частный случай известной теоремы Ляпунова. Это очень глубокий математический результат, который широко применяют в современной математике. Мы тоже будем использовать его в теории оптимального управления. Полное доказательство теоремы Ляпунова опирается на большое количество вспомогательных фактов (см. разделы Д4 — Д6 дополнений) и приведено в разделе Д7 дополнений.

Пример 1. Рассмотрим многозначное отображение $F\colon [0,1] \to \Omega(E^1)$, определенное соотношением $F(t) = t\{-1,1\}$ (рис. 18). Найдем интеграл $G = \int_0^1 F(t)dt$. Очевидно, что максимальное значение $g \in G$ равно $\frac{1}{2}$ и достигается на непрерывной однозначной ветви $f(t) = t$, так как $\int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$. Точно так же минимальное значение $g \in G$ равно $-\frac{1}{2}$ и достигается на непрерывной однозначной ветви $f(t) = -t$, так как $\int_0^1 (-t)dt = -\frac{1}{2}$. Больше непрерывных ветвей у отображения $F(t)$ нет. Таким образом, имеем $G \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Теперь можно воспользоваться теоремой 1, из которой следует, что множество G выпукло. Следовательно, $G = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Но чтобы выяснить, почему интеграл от многозначного отображения является множеством выпуклым независимо от того, являются ли множества $F(t)$ выпуклыми при $t \in I$ или нет, докажем, что $G = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ без помощи теоремы 1.

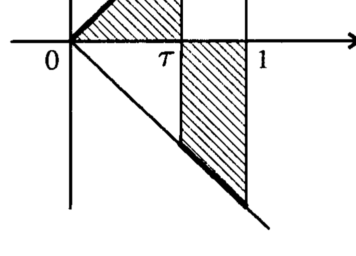


Рис. 18

Мы уже доказали, что $G \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Пусть теперь g — произвольная точка отрезка $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Для того чтобы доказать, что $g \in G$, нужно показать существование такой однозначной ветви $f(t)$ из многозначного отображения $F(t)$, что ее интеграл Лебега равен g. Такая ветвь будет уже разрывной и задается условием

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ -t, & \text{если} \quad \tau < t \leqslant 1, \end{cases}$$

где $\tau = \sqrt{g + \frac{1}{2}}$ (см. рис. 18). Очевидно, функция $f(t)$ интегрируема по Лебегу и $\int_0^1 f(t)\,dt = g$. Это означает, что $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \subset G$ и, таким образом, $G = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Для интеграла от многозначного отображения можно определить опорную функцию

$$c(G, \boldsymbol{\psi}) = \max_{\boldsymbol{g} \in G} \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi} \rangle.$$

Теорема 2. *Пусть многозначное отображение $F(t)$ непрерывно на отрезке $I = [t_0, t_1]$. Тогда имеет место равенство*

$$c\left(\int_{t_0}^{t_1} F(t)dt, \boldsymbol{\psi}\right) = \int_{t_0}^{t_1} c(F(t), \boldsymbol{\psi})dt. \tag{5.2}$$

Доказательство. Интеграл в правой части равенства (5.2) существует, так как опорная функция $c(F(t), \boldsymbol{\psi})$ непрерывна по t.

Зафиксируем произвольный вектор $\boldsymbol{\psi} \in S$. Пусть $G = \int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt$ и максимум опорной функции $c(G, \boldsymbol{\psi})$ достигается на векторе $\boldsymbol{g}^* \in G$, т.е. $c(G, \boldsymbol{\psi}) = \langle \boldsymbol{g}^*, \boldsymbol{\psi} \rangle$. По определению интеграла существует интегрируемая однозначная ветвь $\boldsymbol{f}(t) \in F(t)$ такая, что $\boldsymbol{g}^* = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(t)dt$. Согласно следствию из свойства 6 опорных функций (см. лекцию 3) имеем $\langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant c(F(t), \boldsymbol{\psi})$. Следовательно, в силу свойства 5 интеграла Лебега (см. раздел Д6 дополнений), получаем неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{\psi} \rangle dt \leqslant \int_{t_0}^{t_1} c(F(t), \boldsymbol{\psi})dt.$$

Таким образом, имеем неравенство

$$c(G,\psi)=\langle g^*,\psi\rangle=\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle f(t),\psi\rangle dt\leqslant\int\limits_{t_0}^{t_1}c(F(t),\psi)dt. \tag{5.3}$$

Согласно теореме 2 (см. лекцию 4) у отображения $\mathcal{U}(F(t),\psi)$ существует измеримая однозначная ветвь $f^*(t)$. В силу оценки $|\mathcal{U}(F(t),\psi)|\leqslant|F(t)|\leqslant k$ эта ветвь $f^*(t)$ интегрируема на отрезке I, следовательно, $g=\int_{t_0}^{t_1}f^*(t)dt\in G$ и $\langle g,\psi\rangle\leqslant c(G,\psi)$. По определению опорного множества имеем равенство $c(F(t),\psi)=$ $=\langle f^*(t),\psi\rangle$. Таким образом, справедливо неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}c(F(t),\psi)dt=\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle f^*(t),\psi\rangle dt=\langle g,\psi\rangle\leqslant c(G,\psi). \tag{5.4}$$

Из неравенств (5.3) и (5.4) теперь следует равенство (5.2). Теорема доказана.

С помощью теремы 2 можно довольно просто находить интегралы от многозначных отображений $F(t)$. Действительно, для этого достаточно в соответствии с формулой (5.2) построить опорную функцию $c(F(t),\psi)$, проинтегрировать уже однозначную функцию $c(F(t),\psi)$ по t при каждом значении $\psi\in E^n$, а затем восстановить по полученной опорной функции $c(G,\psi)$ непустое выпуклое компактное множество G. Заметим, что для восстановления выпуклого множества G по его опорной функции $c(G,\psi)$ достаточно подобрать такое множество F, чтобы его опорная функция $c(F,\psi)$ совпадала с $c(G,\psi)$. Тогда согласно следствию из свойства 2 опорных функций (см. лекцию 3) будем иметь $G=F$. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 2. Найдем интеграл $G=\int_{-\pi}^{\pi}F(t)dt$ от многозначного отображения $F:[-\pi,\pi]\to\Omega(E^2)$, которое имеет вид

$$F(t)=A(t)\{-v,v\}, \tag{5.5}$$

где A — матрица размером 2×2, а v — вектор на плоскости E^2. Таким образом, множество $F(t)$ является образом постоянного множества $\{-v,v\}$, состоящего из двух точек $-v$ и v, при отображении $A(t)$. Пусть, далее,

$$A(t)=\begin{pmatrix}\sin t & \operatorname{tg}t\\ \cos t & \operatorname{ctg}t\end{pmatrix},\qquad v=(1,0).$$

Для построения интеграла G найдем сначала его опорную функцию $c(G,\boldsymbol{\psi})$. Из теоремы 2, формулы (5.5) и свойства 4 опорных функций (см. лекцию 3) следует

$$c(G,\boldsymbol{\psi}) = c\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)dt, \boldsymbol{\psi}\right) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} c(F(t),\boldsymbol{\psi})dt =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} c(A(t)\{-\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\},\boldsymbol{\psi})dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} c(\{-\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\}, A^*(t)\boldsymbol{\psi})dt.$$

Очевидно, что опорная функция множества $\{-\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\}$ имеет вид

$$c(\{-\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\},\boldsymbol{\psi}) = |\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{\psi}\rangle|.$$

Таким образом, выполняется равенство

$$c(G,\boldsymbol{\psi}) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\langle \boldsymbol{v}, A^*(t)\boldsymbol{\psi}\rangle|dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\langle A(t)\boldsymbol{v},\boldsymbol{\psi}\rangle|dt.$$

Подставив в это выражение конкретные значения матрицы $A(t)$ и вектора $\boldsymbol{v}$, получим

$$c(G,\boldsymbol{\psi}) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\psi^1 \sin t + \psi^2 \cos t|dt.$$

Запишем координаты вектора $\boldsymbol{\psi} \in E^2$ в виде

$$\psi^1 = \|\boldsymbol{\psi}\| \cos\alpha, \quad \psi^2 = \|\boldsymbol{\psi}\| \sin\alpha.$$

Тогда имеем

$$c(G,\boldsymbol{\psi}) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \|\boldsymbol{\psi}\| \cdot |\sin(t+\alpha)|dt = 4\|\boldsymbol{\psi}\|.$$

Итак, найдена опорная функция интеграла G, а именно, $c(G,\boldsymbol{\psi}) = 4\|\boldsymbol{\psi}\|$. Но опорная функция шара $S_4(\mathbf{0})$ также имеет вид $c(S_4(\mathbf{0}),\boldsymbol{\psi}) = 4\|\boldsymbol{\psi}\|$. Таким образом, опорные функции двух множеств G и $S_4(\mathbf{0})$ совпадают. А так как эти множества выпуклые, то в силу следствия из свойства 11 опорных функций (см. лекцию 3) они совпадают. Следовательно, $G = S_4(\mathbf{0})$.

Заметим, что в примере 2 невозможно построить интеграл G, используя непосредственно определение интеграла, как это было сделано в примере 1. Для этого потребовалось бы интегрировать бесконечное число однозначных ветвей $f(t)$ многозначного отображения $F(t)$. В то же время с помощью теоремы 2 мы сделали это без особого труда.

Пример 3. Найдем интеграл от многозначного отображения $F(t)$, принимающего постоянное значение $F(t) \equiv F$, $F \in \Omega(E^n)$. Воспользовавшись формулой (5.2), получим выражение

$$c\left(\int\limits_{t_0}^{t_1} F dt, \psi\right) = \int\limits_{t_0}^{t_1} c(F, \psi) dt = (t_1 - t_0)\, c(F, \psi).$$

Но такую же опорную функцию имеет выпуклое компактное множество $(t_1 - t_0) \operatorname{conv} F$, так как согласно свойствам опорных функций справедливы равенства

$$c((t_1 - t_0) \operatorname{conv} F, \psi) = (t_1 - t_0)\, c(\operatorname{conv} F, \psi) = (t_1 - t_0)\, c(F, \psi).$$

Таким образом, эти выпуклые компактные множества совпадают, т.е.

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} F dt = (t_1 - t_0) \operatorname{conv} F.$$

Рассмотрим теперь интеграл от многозначной функции с переменным верхним пределом, т.е. функцию

$$G(\tau) = \int\limits_{t_0}^{\tau} F(t) dt,$$

где $\tau \in [t_0, t_1]$. В силу теоремы 1 эта функция отображает отрезок $I = [t_0, t_1]$ в метрическое пространство $\Omega(E^n)$.

Теорема 3. *Пусть многозначное отображение $F : I \to \to \Omega(E^n)$ непрерывно на отрезке I. Тогда многозначное отображение $G(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} F(t) dt$ также непрерывно на отрезке I.*

Доказательство. Согласно теореме 2 имеем

$$c(G(\tau), \psi) = \int\limits_{t_0}^{\tau} c(F(t), \psi) dt.$$

Таким образом, функция $c(G(\tau), \psi)$ непрерывна по τ при каждом фиксированном значении $\psi \in E^n$. Множество $G(\tau)$ выпукло согласно теореме 1. Следовательно, в силу теоремы 1 (см. лекцию 4) многозначное отображение $c\cancel{(G(\tau), \psi)}$ непрерывно. Теорема доказана.

$G(\tau)$

5.2. Задачи

1. Найдите интеграл $G = \int_{-2\pi}^{2\pi} F(t)dt$ от многозначного отображения $F : [-2\pi, 2\pi] \to \Omega(E^2)$, которое имеет вид $F(t) = A(t)\{-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\}$, где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 3\sin t & -\cos 3t \\ 7\cos 3t & \sin 3t \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = (0, 2).$$

2. Найдите интеграл $\int_{t_0}^{t_1} F(t)dt$, где $F(t)$ — шар в пространстве E^n радиуса $r(t)$ с центром в точке $\boldsymbol{a}(t)$, т.е. $F(t) = S_{r(t)}(\boldsymbol{a}(t))$.

3. Пусть многозначные отображения $F_1, F_2 : E^1 \to \Omega(E^n)$ непрерывны на отрезке $I = [t_0, t_1]$. Далее, пусть для любого $t \in I$ выполняется условие

$$\int_{t_0}^{t} F_1(t)dt = \int_{t_0}^{t} F_2(t)dt.$$

Докажите, что для всех $t \in I$ справедливо равенство

$$\operatorname{conv} F_1(t) = \operatorname{conv} F_2(t).$$

4. Пусть задана последовательность непрерывных многозначных отображений $F_i : E^1 \to \Omega(E^n)$, удовлетворяющих оценке $|F_i(t)| \leqslant k(t)$, где функция $k(t)$ интегрируема на отрезке $I = [t_0, t_1]$. Пусть для каждого $t \in I$ выполняется условие $\lim\limits_{i\to\infty} F_i(t) = F(t)$.

Докажите, что отображение $F(t)$ интегрируемо и

$$\lim_{i\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} F_i(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} F(t)dt.$$

Здесь пределы берутся в метрике Хаусдорфа.

ЛЕКЦИЯ 6

- *Постановка линейной задачи быстродействия.*
- *Экспоненциал матрицы, основные свойства экспоненциала.*
- *Линейные дифференциальные уравнения.*
- *Формула Коши.*

6.1. Линейная задача быстродействия

Рассмотрим теперь объект, поведение которого описывается линейной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u},$$

где $\boldsymbol{x}$ — n-мерный вектор фазового состояния системы, $\boldsymbol{u}$ — n-мерный вектор управления, A — квадратная матрица размером $n \times n$. Пусть задано непустое компактное множество U, т.е. $U \in \Omega(E^n)$. Функция $\boldsymbol{u}(t)$ называется *допустимым управлением* на некотором отрезке времени $[t_0, t_1]$, если она измерима и удовлетворяет включению $\boldsymbol{u}(t) \in U$ для всех $t \in I$. Ниже будет показано, что для любого такого управления $\boldsymbol{u}(t)$ и любого начального состояния $\boldsymbol{x}_0(t)$ существует единственнное решение $\boldsymbol{x}(t)$ дифференциального уравнения

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}(t). \tag{6.1}$$

Это решение $\boldsymbol{x}(t)$ и описывает изменение фазового состояния динамического объекта при воздействии на него допустимым управлением $\boldsymbol{u}(t)$.

Пусть в фазовом пространстве E^n заданы два непустых и компактных множества M_0 и M_1, т.е. $M_0, M_1 \in \Omega(E^n)$. Будем говорить, что допустимое управление $\boldsymbol{u}(t)$, заданное на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, осуществляет переход из начального множества M_0 на конечное множество M_1, если соответствующее решение $\boldsymbol{x}(t)$ уравнения (6.1) удовлетворяет граничным условиям $\boldsymbol{x}(t_0) \in M_0, \quad \boldsymbol{x}(t_1) \in M_1$.

В дальнейшем будем предполагать, что начальный момент времени t_0 зафиксирован, а конечный момент времени t_1 определяется из условия попадания решения $\boldsymbol{x}(t)$ на множество M_1. Задача быстродействия заключается теперь в нахождении допустимого управления $u(t)$, осуществляющего переход из множества M_0 на множество M_1 за наименьшее время.

Для этой задачи будем исследовать основные математические вопросы теории оптимального управления, которые подробно были рассмотрены в лекции 1: управляемость, существование оптимального управления, необходимые условия оптимальности, достаточные условия оптимальности и единственность оптимального управления. Конечно, при решении этих вопросов мы будем каждый раз накладывать на динамический объект какие-либо дополнительные требования, но предположения, сделанные выше при постановке задачи быстродействия, будут всегда считаться выполненными. Они составляют суть самой постановки линейной задачи быстродействия.

6.2. Экспоненциал матрицы

Чтобы научиться находить решение $\boldsymbol{x}(t)$ системы дифференциальных уравнений (6.1), нужно уметь достаточно свободно обращаться с матрицами A размером $n \times n$. Из курса алгебры известно, что такие матрицы можно складывать, вычитать, умножать на число и перемножать между собой. Все эти операции мы будем использовать. Более того, если задана переменная матрица $A(t)$, т.е. матрица, каждый элемент которой является функцией переменного t, то эту матрицу можно дифференцировать или интегрировать, причем эти операции проводятся поэлементно.

Рассмотрим еще одну операцию над матрицей A. Поставим в соответствие постоянной матрице A размером $n \times n$ некоторую переменную матрицу, зависящую от действительного параметра t. Эта матрица называется *экспоненциалом* от матрицы A, обозначается через e^{tA} и определяется степенным матричным рядом

$$e^{tA} = E + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \ldots + \frac{t^k}{k!}A^k + \ldots, \tag{6.2}$$

где E — единичная матрица размером $n \times n$. Матричный ряд (6.2) суммируется также поэлементно.

Покажем, что этот ряд сходится абсолютно для любого фиксированного $t \in E^1$. Если a_{ij} — произвольный элемент матрицы A, то справедлива оценка $|a_{ij}| \leqslant \|A\|$, где норма $\|A\|$ матрицы A определяется соотношением

$$\|A\| = \max_{\boldsymbol{x} \in S_1(\mathbf{0})} \|A\boldsymbol{x}\|.$$

Произвольный элемент p матричного ряда (6.2) сам задается некоторым рядом

$$p = p_0 + p_1 + p_3 + \ldots + p_k + \ldots , \tag{6.3}$$

где p_k — соответствующий элемент матрицы $\frac{t^k}{k!}A^k$. Таким образом, справедлива оценка

$$|p_k| \leqslant \left\| \frac{t^k}{k!} A^k \right\| \leqslant \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k$$

и, следовательно, ряд (6.3) абсолютно сходится.

Выведем несколько полезных свойств экспоненциала матрицы e^{tA}. Для любых чисел t, $s \in E^1$ справедлива формула

$$e^{tA} \cdot e^{sA} = e^{(t+s)A}. \tag{6.4}$$

Действительно, поскольку ряд (6.2) и ряд

$$e^{sA} = E + sA + \frac{s^2}{2!}A^2 + \frac{s^3}{3!}A^3 + \ldots + \frac{s^k}{k!}A^k + \ldots$$

сходятся абсолютно, их можно перемножить. В результате получим равенство

$$e^{tA} \cdot e^{sA} = \left(E + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots\right)\left(E + sA + \frac{s^2}{2!}A^2 + \ldots\right) =$$
$$= E + (t+s)A + \frac{1}{2!}\left(t^2 + 2ts + s^2\right)A^2 +$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(t^3 + 3t^2s + 3ts^2 + s^3\right)A^3 + \ldots = e^{(t+s)A}.$$

Из формулы (6.4) сразу следует, что матрица e^{tA} невырождена, и обратная к ней матрица имеет вид

$$(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}.$$

Взяв сопряженную матрицу от левой и правой части равенства (6.2), получим формулу

$$\left(e^{tA}\right)^* = E^* + tA^* + \frac{t^2}{2!}(A^*)^2 + \frac{t^3}{3!}(A^*)^3 + \ldots = e^{tA^*}.$$

Применяя неравенство треугольника для нормы матрицы к равенству (6.2), получим оценку

$$\|e^{tA}\| \leqslant \|E\| + |t| \cdot \|A\| + \frac{|t^2|}{2!}\|A\|^2 + \frac{|t^3|}{3!}\|A\|^3 + \ldots = e^{|t|\cdot\|A\|}.$$

Наконец, поскольку ряд (6.2) сходится абсолютно, можно продифференцировать его почленно по параметру t и получить соотношение

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = E + \frac{t}{1!}A^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \ldots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k + \ldots =$$

$$= A\left(E + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1} + \ldots\right) = Ae^{tA}. \quad (6.5)$$

Экспоненциал от матрицы можно легко вычислить, если удается просуммировать ряд (6.2).

Пример 1. Если матрица A нулевая, то, очевидно, справедлива формула

$$e^{tA} = E + t \cdot 0 + \frac{t^2}{2!} \cdot 0 + \ldots = E.$$

Пример 2. Пусть $n = 2$. Найдем экспоненциал e^{tA} для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Для этого вычислим сумму ряда (6.2). Непосредственно проверяется, что

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = E, \quad A^5 = A, \ldots.$$

Подставляя эти матрицы в ряд (6.2), получаем

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{t^3}{3!}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^4}{4!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \ldots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \ldots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Приведем еще один способ вычисления экспоненциала. Обозначим столбцы матрицы e^{tA} через $e_1(t), \ldots, e_n(t)$. Тогда согласно формуле (6.5) справедливо матричное равенство

$$\Big(\dot{e}_1(t)\Big| \ldots \Big|\dot{e}_n(t)\Big) = A\Big(e_1(t)\Big| \ldots \Big|e_n(t)\Big).$$

Это означает, что каждый вектор $e_i(t)$ является решением линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax. \tag{6.6}$$

Начальные условия определяются соотношением $e^{tA}|_{t=0} = E$, т.е. $e_i(0) = e_i$, $i = 1, \ldots, n$, где $e_1, \ldots, e_n$ — базисные векторы пространства E^n.

Пример 3. Пусть $n = 2$. Вычислим экспоненциал матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, решив при этом систему дифференциальных уравнений (6.6). В данном случае она имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = 0. \end{cases}$$

Общее решение этой системы выражается формулой

$$x(t) = (c_2 t + c_1, c_2).$$

Выбирая в качестве начальных условий базисные векторы $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$, получаем два решения $e_1(t) = (1, 0)$ и $e_2(t) = (1, 1)$, которые являются столбцами матрицы e^{tA}. Следовательно,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.3. Линейные дифференциальные уравнения

Пусть $u(t)$ — некоторое допустимое управление объекта, заданное на отрезке времени $t = [t_0, t_1]$. Рассмотрим дифференциальное уравнение (6.1)

$$\dot{x} = Ax + u(t).$$

Правая часть этого уравнения определена для всех значений $t \in I$ и всех $x \in E^n$.

Если функция $u(t)$ в этом уравнении непрерывна на отрезке времени $t = [t_0, t_1]$, то из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что для любого начального условия $x(t_0) = x_0$ решение уравнения (6.1) существует, является единственным и для любого $t \in [t_0, t_1]$ задается *формулой Коши*

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}u(s)ds, \tag{6.7}$$

причем в этой формуле интеграл понимается в смысле Римана, а само решение $x(t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией.

Однако в примере 2 (см. лекцию 4) было показано, что даже в простейшей линейной задаче быстродействия оптимальное управление $u(t)$ уже не является функцией непрерывной. В указанном примере оптимальное управление $u(t)$ было функцией кусочно непрерывной. Для кусочно непрерывной функции $u(t)$ можно воспользоваться формулой (6.7) на каждом отрезке непрерывности функции $u(t)$. При этом получим кусочно гладкое решение $x(t)$, т.е. сама функция $x(t)$ непрерывна, а ее производная $\dot{x}(t)$ — кусочно непрерывна (рис. 19).

Может, однако, случиться, что оптимальное управление не является кусочно непрерывной функцией. Поэтому допустимые управления являются в рассматриваемой линейной задаче быстродействия функциями измеримыми. Более того, любое допустимое управление $u(t)$ удовлетворяет оценке

$$\|u(t)\| \leqslant |U|.$$

Тем самым согласно свойству 2 интеграла Лебега (см. раздел Д6 дополнений) функции $u(t)$ интегрируемы по Лебегу.

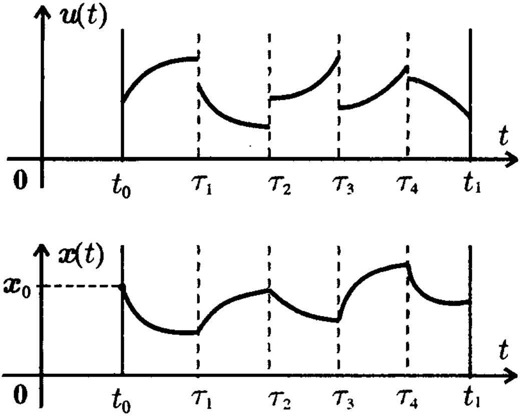


Рис. 19

Функцию $x(t)$ назовем *абсолютно непрерывной* на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, если ее производная $\dot{x}(t)$ существует для почти всех $t \in I$, интегрируема по Лебегу и для всех $t \in I$ выполняется условие

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)ds,$$

т.е. функция $x(t)$ однозначно восстанавливается по своей производной $\dot{x}(t)$. Любая кусочно гладкая функция $x(t)$ является абсолютно непрерывной.

Оказывается, что для любого допустимого управления $u(t)$, т.е. интегрируемой по Лебегу функции $u(t)$, и любого начального состояния $x(t_0) = x_0$ можно также определить решение $x(t)$ дифференциального уравнения (6.1). Но в этом случае решение $x(t)$ уже не будет функцией непререрывно дифференцируемой, а будет лишь функцией абсолютно непрерывной.

Можно представить себе, что на рис. 19 число скачков у функции $u(t)$ увеличивается и становится даже счетным. При этом у решения $x(t)$ появится много изломов, т.е. скачков производной $\dot{x}(t)$, хотя само решение $x(t)$ остается абсолютно непрерывным.

Теорема 1. *Пусть функция* $u(t)$ *в уравнении* (6.1) *интегрируема по Лебегу на отрезке* $I = [t_0, t_1]$. *Тогда для любого начального значения* $x(t_0) = x_0$ *абсолютно непрерывное реше-*

ние $\boldsymbol{x}(t)$ уравнения (6.1) *существует, является единственным и для любого $t \in I$ задается формулой Коши* (6.7), *причем интеграл в этой формуле понимается в смысле Лебега.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что функция $\boldsymbol{x}(t)$, задаваемая формулой (6.7), является решением дифференциального уравнения (6.1). Действительно, при $t = t_0$ очевидно выполняется начальное условие $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$. Далее, используя свойства экспоненциала, найдем производную функции $\boldsymbol{x}(t)$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = Ae^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u}(t) + \int_{t_0}^{t} Ae^{(t-s)A}\boldsymbol{u}(s)ds =$$
$$= A\Big[e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\boldsymbol{u}(s)ds\Big] + \boldsymbol{u}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}(t).$$

Видно, что она совпадает с правой частью уравнения (6.1). Таким образом, при подстановке функции $\boldsymbol{x}(t)$ в уравнение (6.1) получаем равенство

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}(t). \tag{6.8}$$

Заметим, что полученное равенство выполняется лишь для почти всех $t \in [t_0, t_1]$, так как производная $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ абсолютно непрерывной функции $\boldsymbol{x}(t)$ существует лишь почти всюду. Классическое непрерывно дифференцируемое решение $\boldsymbol{x}(t)$ обращает уравнение в тождество при всех t. Тем не менее, абсолютно непрерывная функция $\boldsymbol{x}(t)$ называется *решением дифференциального уравнения* (6.1), если равенство (6.8) выполняется для почти всех $t \in [t_0, t_1]$. Если изменить управление $\boldsymbol{u}(t)$ в отдельных точках или даже на множестве нулевой меры, то равенство (6.8) сохранится, и функция $\boldsymbol{x}(t)$ останется решением. Она вообще не изменится, так как функция $\boldsymbol{u}(t)$ в формуле (6.7) стоит под знаком интеграла, а интеграл Лебега не меняется, если подынтегральную функцию изменить на множестве нулевой меры.

Осталось доказать единственность решения $\boldsymbol{x}(t)$. Предположим противное, т.е. существуют два различных абсолютно непрерывных решения $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$ с одним и тем же начальным условием $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$. Пусть τ — первый такой момент времени, после которого решения $x(t)$ и $y(t)$ расходятся (рис. 20). Выберем малое число $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon\|A\| < 1$, и на отрезке времени $[\tau, \tau+\varepsilon]$ рассмотрим функцию $z(t) = x(t) - y(t)$. Поскольку $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют равенству (6.8), для функции $z(t)$ получаем соотношение

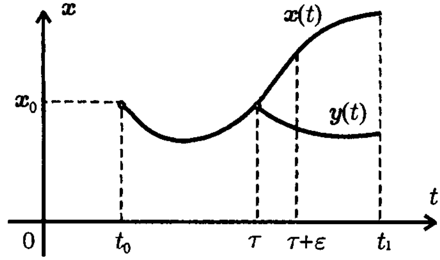


Рис. 20

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) - \dot{y}(t) = Ax(t) - Ay(t) = A(x(t) - y(t)) = Az(t)$$

для почти всех $t \in [\tau, \tau+\varepsilon]$. Проинтегрировав его на отрезке $[\tau, t]$, получим равенство

$$z(t) = \int_{\tau}^{t} Az(s)ds,$$

так как $z(\tau) = 0$. Таким образом, при всех $\tau \leqslant t \leqslant \tau+\varepsilon$ справедливо соотношение

$$\|z(t)\| = \left\|\int_{\tau}^{t} Az(s)ds\right\| \leqslant \int_{\tau}^{t} \|Az(s)\|ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\tau}^{t} \|A\| \cdot \|z(s)\|ds \leqslant \varepsilon \cdot \|A\| \max_{\tau \leqslant t \leqslant \tau+\varepsilon} \|z(t)\| < \max_{\tau \leqslant t \leqslant \tau+\varepsilon} \|z(t)\|.$$

Поскольку функция $z(t)$ непрерывна на отрезке $[\tau, \tau+\varepsilon]$, она достигает своего максимума в некоторой точке $t^* \in [\tau, \tau+\varepsilon]$. Подставляя в полученное соотношение точку $t = t^*$, получим противоречивое неравенство

$$\|z(t^*)\| < \|z(t^*)\|.$$

Тем самым единственность решения $x(t)$ установлена. Теорема доказана.

Замечание. В теореме 1 начальное условие для решения $\boldsymbol{x}(t)$ уравнения (6.1) задавалось на левом конце отрезка времени $[t_0, t_1]$, т.е. в точке t_0, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, и решение $\boldsymbol{x}(t)$ задавалось формулой Коши (6.7). Нетрудно проверить, что теорема 1 сохранится, если задавать начальное условие на правом конце отрезка $[t_0, t_1]$, т.е. в точке t_1, $\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}_1$. Таким образом, и в этом случае решение существует, является единственным и опять задается формулой Коши

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{(t-t_1)A}\boldsymbol{x}_1 + \int_{t_1}^{t} e^{(t-s)A}\boldsymbol{u}(s)ds. \tag{6.9}$$

Это все проверяется точно так же, как и при доказательстве теоремы 1 (читателям предлагается выполнить это самостоятельно).

Пример 4. Пусть $n = 2$. Найти решение системы уравнений

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u}(t),$$

где функция $\boldsymbol{u}(t)$ задается формулой

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{cases} (1,1), & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ (1,-1), & \text{если} \quad 1 < t \leqslant 2, \end{cases}$$

с начальным условием $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 = (1,1)$ на отрезке времени $[0,2]$.

В данном случае $A = 0$, следовательно, $e^{tA} = E$ (см. пример 1) и формула Коши (6.7) принимает вид

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{u}(s)ds.$$

Интегрируя функцию $\boldsymbol{u}(t)$, получаем решение

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{cases} (1+t, 1+t), & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ (1+t, 3-t), & \text{если} \quad 1 < t \leqslant 2. \end{cases}$$

Это решение кусочно гладко, его производная имеет разрыв в точке $t = 1$. На рис. 21 это решение изображено в фазовой плоскости переменного $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2) \in E^2$.

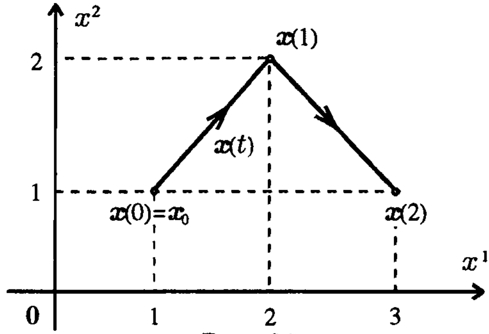


Рис. 21

Пример 5. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 + u^1(t), \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2(t) \end{cases} \tag{6.10}$$

с начальным условием $\boldsymbol{x}(0) = (1, 0)$, когда функция $\boldsymbol{u}(t)$ кусочно непрерывна и задана на отрезке времени $[0, \pi]$ условием

$$\boldsymbol{u}(t) = (u^1(t), u^2(t)) = \begin{cases} (0, 1), & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ (-1, 0), & \text{если} \quad \frac{\pi}{2} < t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Для уравнения (6.10) имеем $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Экспоненциал этой матрицы уже вычислен в примере 2 и равняется

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Подставляя это выражение, а также начальное условие $t_0 = 0$, $\boldsymbol{x}(0) = (1, 0)$ и функцию $\boldsymbol{u}(t)$ в формулу Коши, для всех $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ получаем решение

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \sin(t-s) \\ \cos(t-s) \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом для $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, подставив в формулу Коши (6.7) функцию $\boldsymbol{u}(t)$ и начальное условие $\boldsymbol{x}(\frac{\pi}{2}) = (1, 0)$, получаем решение

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t-\frac{\pi}{2}) & \sin(t-\frac{\pi}{2}) \\ -\sin(t-\frac{\pi}{2}) & \cos(t-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t-\frac{\pi}{2}) \\ -\sin(t-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} + \int_{\frac{\pi}{2}}^t \begin{pmatrix} -\cos(t-s) \\ \sin(t-s) \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ 1-\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t + \cos t \\ 1+\cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

Окончательно имеем решение

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{cases} (1, 0), & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ (\sin t + \cos t,\ 1 + \cos t - \sin t), & \text{если} \quad \frac{\pi}{2} < t \leqslant \pi. \end{cases}$$

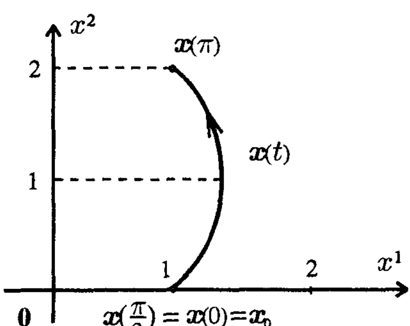


Рис. 22

Это решение является абсолютно непрерывной функцией, оно кусочно гладко, но не является функцией непрерывно дифференцируемой. Его производная $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ имеет разрыв при $t = \frac{\pi}{2}$. На рис. 22 решение $\boldsymbol{x}(t)$ изображено в фазовой плоскости $(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2) \in E^2$.

Пример 6. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = u^2 \end{cases}$$

с начальным условием на правом конце отрезка времени $[0, 2]$, $\boldsymbol{x}(2) = 0$, когда функция $\boldsymbol{u}(t)$ кусочно непрерывна и задана условием

$$\boldsymbol{u}(t) = (u^1(t), u^2(t)) = \begin{cases} (0, 0), & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ (0, 1), & \text{если} \quad 1 < t \leqslant 2. \end{cases}$$

Экспоненциал матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ вычислен в примере 3. Он имеет вид

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставив это выражение и условие $\boldsymbol{x}(2) = 0$ в формулу (6.9), получим выражение

$$\boldsymbol{x}(t) = \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 1 & t - s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1(s) \\ u^2(s) \end{pmatrix} ds.$$

Подставив сюда функцию $\boldsymbol{u}(t)$ и проинтегрировав, получаем

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(\frac{t^2}{2} - 2t + 2,\ t - 2\right)$$

при $1 < t \leqslant 2$ и

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(-t + \frac{3}{2},\ -1\right)$$

при $0 \leqslant t \leqslant 1$.

На рис. 23 это решение изображено в фазовой плоскости $(x^1, x^2) \in E^2$.

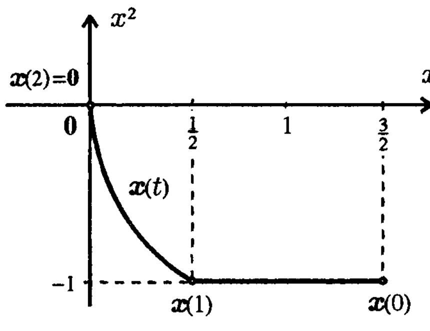


Рис. 23

6.4. Задачи

1. Пусть A и B — произвольные матрицы размером $n \times n$. Всегда ли выполняется равенство

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B}?$$

2. Вычислите экспоненциал e^{tA} для следующих матриц A:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, 6) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$.

3. Вычислите экспоненциал блочной матрицы

$$\begin{pmatrix} A_1 & \| & 0 & \| & 0 & \| & \ldots & \| & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & \| & A_2 & \| & 0 & \| & \ldots & \| & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \vdots & \| & \vdots & \| & \vdots & \| & \ddots & \| & \vdots \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & \| & 0 & \| & 0 & \| & \ldots & \| & A_n \end{pmatrix}.$$

4. Докажите, что если матрица A имеет вид $A = T^{-1}BT$, где T — невырожденное преобразование, то

$$e^{tA} = T^{-1}e^{tB}T.$$

ЛЕКЦИЯ 7

- *Множества достижимости и управляемости линейной управляемой системы.*
- *Их основные свойства.*

7.1. Множество достижимости

Рассмотрим снова управляемый объект, поведение которого описывается линейной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}, \tag{7.1}$$

класс допустимых управлений, состоящий из всех функций $\boldsymbol{u}(t) \in U$, $U \in \Omega(E^n)$, интегрируемых по Лебегу на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, и начальное множество $M_0 \in \Omega(E^n)$. Пусть $t \in [t_0, t_1]$. *Множеством достижимости* $X(t)$ в момент времени t назовем множество всех точек из фазового пространства E^n, в которые можно перейти на отрезке времени $[t_0, t_1]$ из всех возможных точек начального множества M_0 по решениям уравнения (7.1) при всех возможных допустимых управлениях $\boldsymbol{u}(t)$. Таким образом, множество достижимости $X(t)$ состоит из всех точек вида $\{\boldsymbol{x}(t)\}$, где $\boldsymbol{x}(t)$ — решение уравнения (7.1) с начальным условием $\boldsymbol{x}(t_0) \in M_0$ и с допустимым управлением $\boldsymbol{u}(t)$ (рис. 24). Множество достижимости зависит, конечно, от матрицы A, ограничивающего множества U, множества начальных состояний M_0 и отрезка времени $[t_0, t_1]$. Рассмотрим некоторые свойства множества достижимости.

Свойство 1. *Множество достижимости $X(t)$ представляется в виде*

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} M_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} U\, ds, \tag{7.2}$$

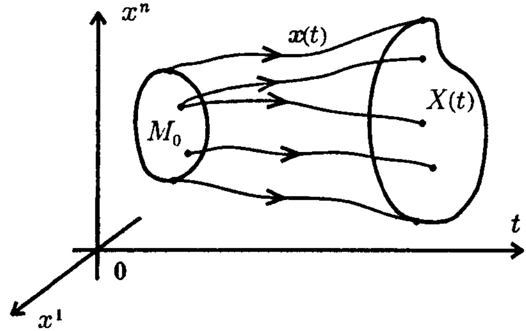


Рис. 24

где $e^{(t-t_0)A}M_0$ — образ множества M_0 при линейном преобразовании $e^{(t-t_0)A}$ (см. лекцию 2), а под знаком интеграла стоит многозначное отображение, которое получается для всех $s \in [t_0, t]$ как образ множества U при линейном преобразовании $e^{(t-s)A}$.

Доказательство свойства 1 непосредственно следует из формулы Коши

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{(t-\overset{t_0}{s})A}\boldsymbol{x}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\boldsymbol{u}(s)\,ds$$

(см. лекцию 6) и определений множества достижимости, образа множества при линейном преобразовании, алгебраической суммы множеств (см. лекцию 2) и интеграла Лебега от многозначного отображения (см. лекцию 5).

Свойство 2. *Множество достижимости является непустым компактным подмножеством фазового пространства E^n, т.е. $X(t) \in \Omega(E^n)$.*

Доказательство этого свойства непосредственно следует из формулы (7.2) и теоремы 1 о непустоте и компактности интеграла от многозначного отображения (см. лекцию 5).

Свойство 3. *Если начальное множество M_0 выпукло, то множество достижимости $X(t)$ тоже выпукло.*

Доказательство этого свойства очевидным образом следует из формулы (7.2) и теоремы 1 о выпуклости интеграла от многозначного отображения (см. лекцию 5).

Свойство 4. *Опорная функция множества достижимости имеет вид*

$$c(X(t),\psi) = c(M_0, e^{(t-t_0)A^*}\psi) + \int\limits_{t_0}^{t} c(U, e^{(t-s)A^*}\psi)\,ds. \tag{7.3}$$

Доказательство этого свойства также непосредственно следует из формулы (7.2), свойств опорных функций и теоремы 2 (см. лекцию 5).

Действительно, если взять опорную функцию от левой и правой частей равенства (7.2) и воспользоваться перечисленными фактами, то получим формулу (7.3).

Свойство 5. *Пусть τ — длина отрезка времени $[t_0, t]$, т.е. $\tau = t - t_0$. Тогда множество достижимости $X(t)$ зависит только от длины отрезка τ и имеет вид*

$$X(t) = e^{\tau A}M_0 + \int\limits_{0}^{\tau} e^{sA}U\,ds. \tag{7.4}$$

Доказательство. Заметим, что для каждого конкретного управления $\boldsymbol{u}(t) \in U$ дифференциальное уравнение (7.1) не является автономным, но поскольку ограничивающее множество U постоянно, управляемый объект

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \in U$$

в целом ведет себя как автономная система дифференциальных уравнений. При этом неважно, в какой момент времени t_0 начать движение, множество достижимости $X(t)$ зависит только от длины временнóго интервала $\tau = t - s$. Сделав замену переменных $t - s = \alpha$ в интеграле в формуле (7.3), получаем равенства

$$\int\limits_{t_0}^{t} c(U, e^{(t-s)A^*}\psi)\,ds = \int\limits_{t-t_0}^{0} c(U, e^{\alpha A^*}\psi)(-d\alpha) = \int\limits_{0}^{t-t_0} c(U, e^{\alpha A^*}\psi)\,d\alpha. \tag{7.5}$$

Восстановив теперь по этим опорным функциям выпуклые компактные множества, получим равенство

$$\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} U\, ds = \int_{0}^{t-t_0} e^{\alpha A} U\, d\alpha.$$

Учитывая, что $\tau = t - t_0$, и формулу (7.2), получаем формулу (7.4).

Свойство 6. *Опорная функция $c(X(t), \psi)$ как функция длины отрезка $\tau = t - t_0$ имеет вид*

$$c(X(t), \psi) = c(M_0, e^{\tau A^*}\psi) + \int_{0}^{\tau} c(U, e^{sA^*}\psi)\, ds. \qquad (7.6)$$

Доказательство этой формулы очевидно. Для этого нужно либо во всей формуле (7.3) сделать замену переменной, либо просто взять опорную функцию от левой и правой частей в формуле (7.4).

Свойство 7. *Множество достижимости $X(t)$ непрерывно зависит от аргумента t, т.е. многозначное отображение $X(\cdot) : I \to \Omega(E^n)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа.*

Доказательство. Согласно формуле (7.4) множество достижимости $X(t)$ непрерывно зависит от длины отрезка $\tau = t - t_0$. Действительно, в силу теоремы 3 (см. лекцию 5), интеграл от многозначного отображения непрерывен по верхнему пределу, а отображение $e^{\tau A} M_0$ непрерывно как образ постоянного множества M_0 при непрерывном линейном преобразовании $e^{\tau A}$ (см. лекцию 4). Следовательно, отображение $X(t)$ непрерывно зависит от τ как сумма двух непрерывных многозначных отображений. Если начальный момент времени t_0 фиксирован, то множество достижимости $X(t)$ непрерывно зависит от аргумента $t = t_0 + \tau$.

Множества достижимости играют фундаментальную роль в теории оптимального управления. На их свойствах основаны все дальнейшие результаты. Для этих свойств существенно то, что в качестве класса допустимых управлений выбирают всевозможные измеримые функции $u(t) \in U$, т.е. функции, интегрируемые по Лебегу на любом конечном отрезке времени $[t_0, t_1]$. Именно в этом классе функций интеграл от многозначного отображения, а следовательно, и множество достижимости является непустым, выпуклым и компактным.

7.2. Множество управляемости

Рассмотрим, помимо множества достижимости $X(t)$, еще одно множество — множество управляемости $Y(t)$. *Множеством управляемости* $Y(t)$ в любой момент времени $t \in [t_0, t_1]$ называют множество всех точек фазового пространства E^n, из которых можно перейти на отрезке времени $[t, t_1]$ на множество конечных состояний M_1 по решениям уравнения (7.1) при всевозможных допустимых управлениях $\boldsymbol{u}(t) \in U$ (рис. 25). Таким образом, множество управляемости $Y(t)$ состоит из всех точек $\{\boldsymbol{x}(t)\}$, где $\boldsymbol{x}(t)$ — решение уравнения (7.1) с условием на правом конце $\boldsymbol{x}(t_1) \in M_1$ и с допустимым управлением $\boldsymbol{u}(t)$.

Поскольку каждое такое решение также задается формулой Коши (см. формулу (6.9) лекции 6)

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{(t-t_1)A}\boldsymbol{x}(t_1) + \int_{t_1}^{t} e^{(t-s)A}\boldsymbol{u}(s)\,ds = \\ = e^{(t-t_1)A}\boldsymbol{x}(t_1) + \int_{t}^{t_1} e^{(t-s)A}[-\boldsymbol{u}(s)]\,ds,$$

множество управляемости имеет вид

$$Y(t) = e^{(t-t_1)A}M_1 + \int_{t}^{t_1} e^{(t-s)A}[-U]\,ds. \tag{7.7}$$

Точно так же доказывается, что множество управляемости непусто и компактно, оно выпукло, если выпукло множество M_1, и

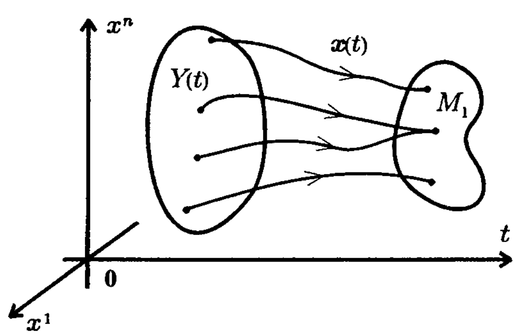


Рис. 25

непрерывно зависит от времени t. Опорная функция множества управляемости $Y(t)$ имеет вид

$$c(Y(t),\psi) = c(M_1, e^{(t-t_1)A^*}\psi) + \int\limits_t^{t_1} c(U, -e^{(t-s)A^*}\psi)\,ds. \qquad (7.8)$$

Пусть τ — длина отрезка времени $[t,t_1]$, т.е. $\tau = t_1 - t$. Тогда множество управляемости $Y(t)$ зависит только от длины отрезка τ и имеет вид

$$Y(t) = e^{-\tau A}M_1 + \int\limits_0^{\tau} e^{-sA}[-U]\,ds, \qquad (7.9)$$

а его опорная функция задается формулой

$$c(Y(t),\psi) = c(M_1, e^{-\tau A^*}\psi) + \int\limits_0^{\tau} c(U, -e^{-sA^*}\psi)\,ds. \qquad (7.10)$$

Все эти свойства множества управляемости $Y(t)$ проверяются точно так же, как это было сделано при доказательстве свойств 1 — 7 множества достижимости $X(t)$.

Заметим, что перечисленные выше свойства множеств достижимости и управляемости справедливы для любой матрицы A и любых непустых компактных множеств U, M_0, $M_1 \in \Omega(E^n)$, т.е. справедливы для любой линейной управляемой системы (7.1).

Пример 1. Для матрицы $A = 0$ для множества достижимости $X(t)$ и множества управляемости $Y(t)$ из формул (7.4) и (7.9) получаем соответственно следующие выражения:

$$X(t) = M_0 + \int\limits_0^{\tau} U\,ds = M_0 + \tau\operatorname{conv} U,$$

$$Y(t) = M_1 + \int\limits_0^{\tau} (-U)\,ds = M_1 + \tau\operatorname{conv}(-U)$$

(см. пример 3 об интегрировании постоянного множества из лекции 5).

Пусть, в частности, $n = 2$ и множество U состоит из двух точек $(1,1)$, $(1,-1)$ (рис. 26). Если $M_0 = \{0\}$, то множество достижимости $X(t)$ на любом отрезке времени $[t_0, t]$ длины $\tau = t - t_0$ есть отрезок

$$X(t) = \{\boldsymbol{x} \in E^2 : \boldsymbol{x}^1 = \tau,\ |\boldsymbol{x}^2| \leqslant \tau\}.$$

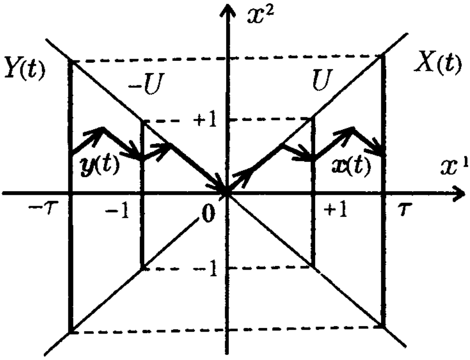


Рис. 26

Если положить $M_1 = \{0\}$, то множество управляемости $Y(t)$ на любом отрезке времени $[t, t_1]$ длины $\tau = t_1 - t$ есть отрезок

$$Y(t) = \{\boldsymbol{x} \in E^2 :\ \boldsymbol{x}^1 = -\tau,\ |\boldsymbol{x}^2| \leqslant \tau\}.$$

На рис. 26 приведены также две конкретные траектории. Решение $\boldsymbol{x}(t)$ переводит точку $M_0 = \{0\}$ в некоторую точку множества $X(t)$ на отрезке времени длины τ, а решение $\boldsymbol{y}(t)$ переводит некоторую точку множества $Y(t)$ в точку $M_1 = \{0\}$ на отрезке времени длины τ.

Замечание. При вычислении множества достижимости $X(t, M_0)$ из начального множества M_0 на отрезке времени $\tau = t - t_0$ основную трудность представляет вычисление множества достижимости из начала координат $M_0 = \{0\}$, т.е. множества

$$X(t, \{0\}) = \int\limits_0^{\tau} e^{sA} U\, ds \tag{7.11}$$

(см. формулу (7.4)). Множество достижимости из произвольного начального множества M_0 получаем прибавлением слагаемого $e^{\tau A} M_0$. Например, если M_0 состоит из одной начальной точки $\{\boldsymbol{x}_0\}$, то для каждого τ нужно сдвинуть множество $X(t, \{0\})$ на вектор $e^{\tau A}\boldsymbol{x}_0$. Аналогично обстоит дело с множеством управляемости $Y(t)$.

Для вычисления множества достижимости $X(t)$ или множества управляемости $Y(t)$, когда множества M_0 и M_1 выпуклые, следует сначала вычислить их опорные функции (7.6) или

(7.10), а затем восстановить выпуклые компакты $X(t)$ или $Y(t)$ по их опорным функциям.

Пример 2. Найти множество достижимости $X(t)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant \pi$ из начального множества $M_0 = \{\mathbf{0}\}$ для управляемой системы, описывающей поведение маятника (см. пример 2 из лекции 1):

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + v \end{cases}$$

с ограничением на управляющую силу $|v(t)| \leqslant 1$.

Чтобы привести эту систему к стандартному виду (7.1), определим вектор управления $\boldsymbol{u} = (u^1, u^2) = (0, v)$. Тогда множество U будет отрезком

$$U = \{\boldsymbol{u} \in E^2 : \ u^1 = 0, \ |u^2| \leqslant 1\}$$

в фазовом пространстве E^2. Его опорная функция, очевидно, имеет вид

$$c(U, \boldsymbol{\psi}) = |\psi^2|.$$

Экспоненциал e^{tA} для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ рассматриваемой системы уже вычислен в примере 2 (см. лекцию 6):

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь опорную функцию множества достижимости $c(X(t), \boldsymbol{\psi})$. Подставив в формулу (7.6) значения M_0, U и e^{tA}, после несложных вычислений получаем выражение

$$c(X(t), \boldsymbol{\psi}) = \int\limits_0^{\tau} |\psi^1 \sin s + \psi^2 \cos s| \, ds.$$

Произвольный вектор $\psi = (\psi^1, \psi^2) \in S$ на плоскости E^2 представим в полярных координатах

$$\psi^1 = \cos\alpha, \quad \psi^2 = \sin\alpha, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi. \tag{7.12}$$

Таким образом, для опорной функции $c(X(t), \boldsymbol{\psi})$ получим выражение

$$c(X(t), \boldsymbol{\psi}) = \int\limits_0^{\tau} |\sin(\alpha + s)| \, ds = \int\limits_{\alpha}^{\alpha+\tau} |\sin\theta| \, d\theta. \tag{7.13}$$

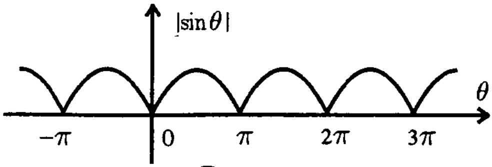


Рис. 27

Итак, чтобы научиться вычислять опорную функцию, нужно уметь интегрировать функцию $|\sin\theta|$ (рис. 27). Эта функция периодическая с периодом π. Интеграл от функции $|\sin\theta|$ на отрезке $[0,\beta]$ тоже периодическая функция от параметра β с периодом π (рис. 28) и задается формулой

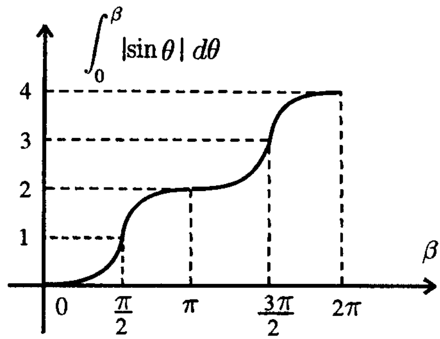


Рис. 28

$$\int_0^\beta |\sin\theta|\,d\theta = 2\left[\frac{\beta}{\pi}\right] - 1 - \cos\left(\beta - \left[\frac{\beta}{\pi}\right]\pi\right), \tag{7.14}$$

где $\left[\frac{\beta}{\pi}\right]$ — целая часть числа $\frac{\beta}{\pi}$. Это несложное упражнение из математического анализа читателям предлагается проделать самостоятельно.

Используя формулу (7.14), вычислим опорную функцию (7.13). Вычисление распадается на четыре случая в зависимости от значения параметра $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, точнее, в зависимости от того, в какой из четырех секторов попадает угол α (рис. 29). Проведя аккуратные вычисления, получаем для опорной функции следующее выражение:

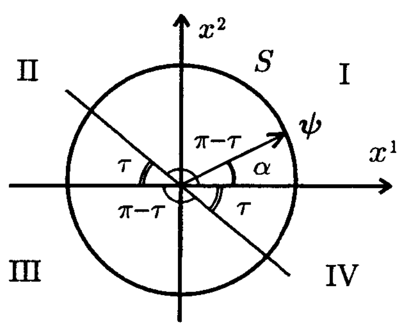


Рис. 29

$$c(X(t),\psi)=\begin{cases}(1-\cos\tau)\cos\alpha+\sin\tau\sin\alpha, & 0\leqslant\alpha\leqslant\pi-\tau,\\ 2+(1+\cos\tau)\cos\alpha-\sin\tau\sin\alpha, & \pi-\tau<\alpha\leqslant\pi,\\ (\cos\tau-1)\cos\alpha-\sin\tau\sin\alpha, & \pi<\alpha\leqslant 2\pi-\tau,\\ 2-(1+\cos\tau)\cos\alpha+\sin\tau\sin\alpha, & 2\pi-\tau<\alpha\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

Таким образом, в зависимости от того, в какой сектор попадает вектор ψ, заданный формулами (7.12), получаем разные выражения для опорной функции. Учитывая формулы (7.12) и тот факт, что $\|\psi\|=1$, окончательно имеем выражение

$$c(X(t),\psi)=\begin{cases}(1-\cos\tau)\psi^1+\sin\tau\cdot\psi^2, & \psi\in\mathrm{I},\\ 2\|\psi\|+(1+\cos\tau)\psi^1-\sin\tau\cdot\psi^2, & \psi\in\mathrm{II},\\ (-1+\cos\tau)\psi^1-\sin\tau\cdot\psi^2, & \psi\in\mathrm{III},\\ 2\|\psi\|-(1+\cos\tau)\psi^1+\sin\tau\cdot\psi^2, & \psi\in\mathrm{IV}.\end{cases} \tag{7.15}$$

Когда вектор ψ пробегает I и III секторы, то это — опорная функция одной точки

$$(1-\cos\tau,\,\sin\tau),\qquad(-1+\cos\tau,\,-\sin\tau),$$

соответственно, а когда вектор ψ пробегает II и IV секторы, то это — опорная функция кругов

$$S_2(1+\cos\tau,\,-\sin\tau),\qquad S_2(-1-\cos\tau,\,\sin\tau), \tag{7.16}$$

соответственно. Множество достижимости $X(t)$, заданное опорной функцией (7.15), является пересечением двух кругов (7.16), оно изображено на рис. 30.

При $\tau=\pi$ опорная функция $c(X(t_0+\pi),\psi)$ принимает постоянное значение $2\|\psi\|$ в секторах II и IV, сектора I и III вырождаются. Таким образом, имеем равенство

$$X(t_0+\pi)=S_2(\mathbf{0}).$$

На рис. 31 показана динамика множеств достижимости $X(t)$ при увеличении длины отрезка времени $\tau=t-t_0$ в пределах от 0 до π.

Пример 3. Найти множество управляемости $Y(t)$ на конечное множество $M_1=\{\mathbf{0}\}$ для управляемой системы

$$\begin{cases}\dot x^1=x^2,\\ \dot x^2=v, \quad |v|\leqslant 1.\end{cases}$$

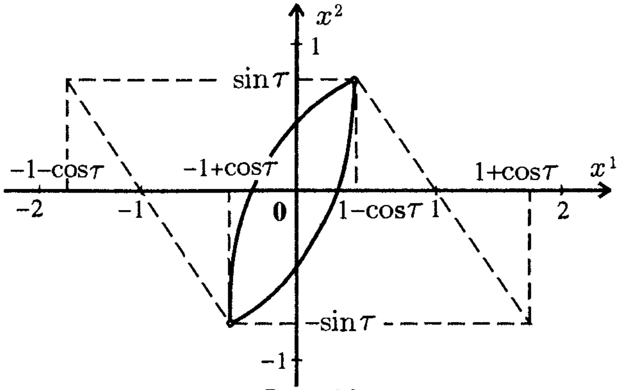


Рис. 30

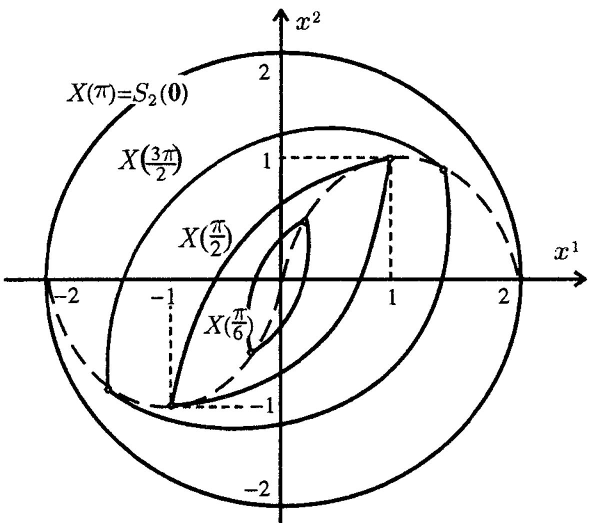


Рис. 31

Вновь перейдем к стандартному виду (7.1), положив $\boldsymbol{u} = (u^1, u^2) = (0, v)$. Таким образом, множество

$$U = \{\boldsymbol{u} \in E^2 : \; u^1 = 0, \, |u^2| \leqslant 1\}$$

является отрезком в фазовом пространстве E^2, его опорная функция имеет вид

$$\mathrm{c}(U, \boldsymbol{\psi}) = |\psi^2|.$$

Экспоненциал матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ был вычислен в примере 3 (см. лекцию 6). Он имеет вид

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя все эти данные в формулу (7.10), получаем для опорной функции множества управляемости $Y(t)$ следующее выражение в зависимости от длины отрезка $\tau = t_1 - t$:

$$\mathrm{c}(Y(t), \psi) = \int_0^{\tau} |\psi^1 s - \psi^2|\, ds. \tag{7.17}$$

Под знаком интеграла в формуле (7.17) стоит модуль линейной функции. Вычисление этого интеграла распадается на четыре случая.

1. Если при всех $0 \leqslant s \leqslant \tau$ выполняется неравенство $\psi^1 s - \psi^2 \geqslant 0$, то, очевидно, получаем выражение

$$c(Y(t), \psi) = \frac{1}{2}\tau^2\psi^1 - \tau\psi^2. \tag{7.18}$$

2. Если при всех $0 \leqslant s \leqslant \tau$ выполняется неравенство $\psi^1 s - \psi^2 \leqslant 0$, то получаем выражение

$$\mathrm{c}(Y(t), \psi) = -\frac{1}{2}\tau^2\psi^1 + \tau\psi^2. \tag{7.19}$$

3. Пусть существует $0 < s^* < \tau$ такое, что $\psi^1 s^* - \psi^2 = 0$, и пусть $\psi^1 > 0$. Тогда подынтегральная функция имеет график, изображенный на рис. 32, и интеграл в формуле (7.17) можно вычислить отдельно на отрезках $[0, s^*]$ и $[s^*, \tau]$. Таким образом, получаем выражение

$$c(Y(t), \psi) = \frac{(\psi^2)^2}{\psi^1} + \frac{1}{2}\tau^2\psi^1 - \tau\psi^2. \tag{7.20}$$

4. Аналогично для случая $\psi^1 < 0$ имеем

$$c(Y(t), \psi) = -\frac{(\psi^2)^2}{\psi^1} - \frac{1}{2}\tau^2\psi^1 + \tau\psi^2. \tag{7.21}$$

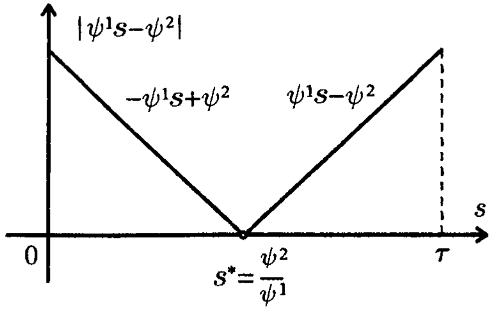


Рис. 32

Нетрудно убедиться, что выпуклое компактное множество $Y(t)$, изображенное на рис. 33, имеет опорную функцию, которая задается формулами (7.18)–(7.21). Это множество $Y(t)$ ограничено двумя параболами

$$x^1 = \frac{1}{2}\tau^2 - \frac{1}{2}(x^2+\tau)^2, \qquad x^1 = -\frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{2}(x^2-\tau)^2.$$

Читателям предлагается проверить это самостоятельно.

На рис. 34 показана динамика множества управляемости $Y(t)$ при увеличении длины отрезка времени $\tau = t_1 - t$.

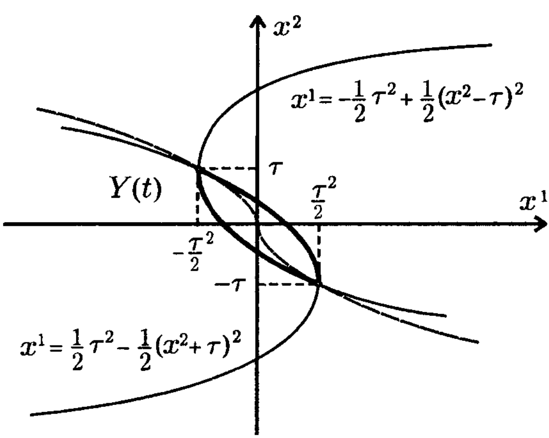


Рис. 33

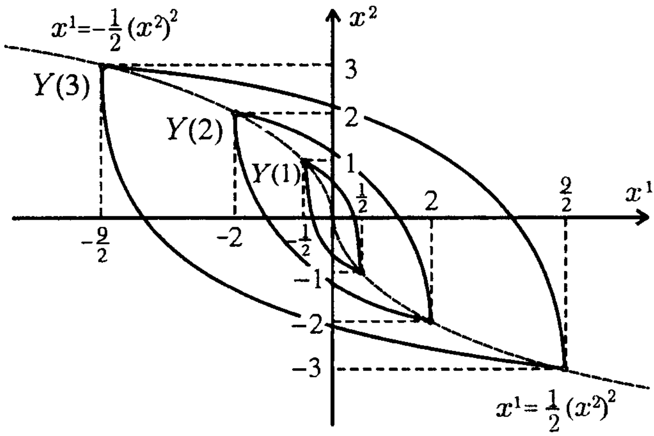


Рис. 34

7.3. Задачи

1. Найдите для управляемой системы

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + v, \quad |v| \leqslant 1 \end{cases} \tag{7.22}$$

множество достижимости $X(t)$ при $t \geqslant \pi$ из начального множества $M_0 = \{\mathbf{0}\}$.

2. Найдите для управляемой системы (7.22) множество управляемости $Y(t)$ для конечного множества $M_1 = \{\mathbf{0}\}$.

3. Найдите для управляемой системы

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = v, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1 \end{cases} \tag{7.23}$$

множество достижимости $X(t)$ из начального множества $M_0 = \{\mathbf{0}\}$.

4. Найдите для управляемой системы (7.23) множество достижимости $X(t)$ из начального множества

$$M_0 = \{\boldsymbol{x}_0\} = \{(0, 1)\}.$$

5. Найдите для управляемой системы (7.23) множество управляемости $Y(t)$ для конечного множества $M_1 = \{\mathbf{0}\}$.

6. Найдите для управляемой системы

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 + u^1, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2, \quad \boldsymbol{u} \in S_1(\mathbf{0}) \end{cases}$$

множество достижимости $X(t)$ из начального множества

$$M_0 = \{\boldsymbol{x} \in E^2 : \ |x^1| \leqslant 2, \ x^2 = 0\}.$$

7. Найдите для управляемой системы

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 + u^1, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2, \quad \boldsymbol{u} \in \{-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\} \end{cases}$$

где $\boldsymbol{v} \in E^2$ — некоторый фиксированный вектор, множество управляемости $Y(t)$ для $t = \pi$ на конечное множество

$$M_1 = \{\boldsymbol{x} \in E^2 : \ x^1 = 0, \ |x^2| \leqslant 1\}.$$

8. Докажите, что если $M_0 = \{\mathbf{0}\}$ и множество U симметричное, т.е. для любого $\boldsymbol{u} \in U$ справедливо включение $-\boldsymbol{u} \in U$, то для любой управляемой системы (7.1) множество достижимости $X(t)$ всегда будет симметричным.

9. Докажите, что для случая $M_0 = \{\boldsymbol{x}_0\}$ опорная функция множества достижимости $c(X(t), \boldsymbol{\psi})$ всегда непрерывно дифференцируема по времени t для любого фиксированного вектора $\boldsymbol{\psi} \in E^n$.

10. Докажите, что если $M_0 = \{\mathbf{0}\}$ и $\mathbf{0} \in U$, то множество достижимости $X(t)$ расширяется со временем t, т.е. при $t' < t''$ справедливо включение $X(t') \subset X(t'')$.

11. Докажите, что если $M_1 = \{\mathbf{0}\}$ и $\mathbf{0} \in U$, то множество управляемости сужается со временем t, т.е. при $t' < t''$ справедливо включение $Y(t') \supset Y(t'')$.

ЛЕКЦИЯ 8

- *Задача управляемости.*
- *Теорема об управляемости.*
- *Лемма о внутренней точке интеграла.*
- *Локальная управляемость линейных систем.*
- *Достаточные условия локальной управляемости.*

8.1. Общая задача управляемости

Рассмотрим управляемый объект, описываемый уравнением

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}, \tag{8.1}$$

где, как обычно, $\boldsymbol{x} \in E^n$ — вектор фазового состояния объекта, $\boldsymbol{u} \in E^n$ — вектор управления, A — квадратная матрица размером $n \times n$. Допустимым управлением является произвольная измеримая функция $\boldsymbol{u}(t) \in U$, $U \in \Omega(E^n)$. Пусть заданы начальное и конечное множества M_0, $M_1 \in \Omega(E^n)$. Задача управляемости заключается *в установлении следующего факта*: существует ли на некотором отрезке времени $[t_0, t_1]$ хотя бы одно такое допустимое управление $\boldsymbol{u}(t)$, что соответствующее ему решение $\boldsymbol{x}(t)$ уравнения (8.1) удовлетворяет граничным условиям

$$\boldsymbol{x}(t_0) \in M_0, \qquad \boldsymbol{x}(t_1) \in M_1. \tag{8.2}$$

Заметим, что в задаче управляемости мы не оцениваем качество перехода из множества M_0 на M_1.

Будем говорить, что объект является управляемым на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$ из множества M_0 на множество M_1, если существует хотя бы одно допустимое управление $\boldsymbol{u}(t)$ такое, что соответствующее ему решение $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет граничным условиям (8.2), т.е. осуществляет переход из начального множества M_0 на конечное множество M_1 на отрезке времени $[t_0, t_1]$.

Определим функцию $\varphi:\ E^n \to E^1$ соотношением

$$\varphi(\psi) = c(M_0, e^{(t_1-t_0)A^*}\psi) + c(M_1, -\psi) + \int\limits_0^{t_1-t_0} c(U, e^{sA^*}\psi)\, ds. \tag{8.3}$$

Теорема об управляемости. *Пусть множества M_0 и M_1 выпуклы. Тогда объект является управляемым на отрезке времени $[t_0, t_1]$ из множества M_0 на множество M_1 тогда и только тогда, когда для любого вектора $\psi \in S$ функция управляемости неотрицательна, т.е.*

$$\varphi(\psi) \geqslant 0, \tag{8.4}$$

а это в свою очередь эквивалентно условию

$$\varphi_0 = \min_{\psi \in S} \varphi(\psi) \geqslant 0. \tag{8.5}$$

Доказательство. Очевидно, что объект является управляемым на отрезке времени $[t_0, t_1]$ из множества M_0 на множество M_1 тогда и только тогда, когда для множества достижимости $X(t)$ выполнено соотношение

$$X(t_1) \cap M_1 \neq \emptyset. \tag{8.6}$$

Так как множество M_1 выпукло и согласно свойству 3 множеств достижимости (см. лекцию 7) множество $X(t_1)$ также выпукло, то в силу следствия из свойства 12 опорных функций (см. лекцию 12), выполнение соотношения (8.6) эквивалентно выполнению неравенства

$$c(X(t_1), \psi) + c(M_1, -\psi) \geqslant 0$$

для любого вектора $\psi \in S$. Подставляя в это выражение опорную функцию множества достижимости $X(\tau)$ при $\tau = t_1 - t_0$ (см. формулу (7.6) из лекции 7), мы получаем эквивалентное выражение

$$c(M_0, e^{(t_1-t_0)A^*}\psi) + \int\limits_0^{t_1-t_0} c(U, e^{s\tau A^*}\psi)\, ds + c(M_1, -\psi) \geqslant 0,$$

e^{sA^*}

которое также должно выполняться для любого вектора $\psi \in E^n$. Но в силу положительной однородности опорных функций (свойство 1 из лекции 7), это соотношение достаточно проверить лишь для векторов $\psi \in S$, а это эквивалентно выполнению неравенства (8.4). Функция управляемости $\varphi(\psi)$ непрерывна, так как все опорные функции в формуле (8.3) непрерывны по следствию свойства 13 (см. лекцию 3), а множество $S \subset E^n$ компактно. Таким образом, условие (8.4) эквивалентно условию (8.5). Теорема доказана.

Заметим, что при доказательстве теоремы об управляемости вместо соотношения (8.6) можно было бы использовать соотношение

$$M_0 \cap Y(t_0) \neq \emptyset,$$

где $Y(t)$ — множество управляемости, и получить неравенство, эквивалентное неравенству (8.4).

Если множества $M_0, M_1 \in \Omega(E^n)$ не являются выпуклыми, то мы не получим полного критерия управляемости. Только в одну сторону из управляемости объекта (8.1) на отрезке времени $[t_0, t_1]$ будет следовать, что функция управляемости $\varphi(\psi)$ удовлетворяет неравенству (8.4).

Отметим также, что функция управляемости $\varphi(\psi)$ зависит лишь от длины отрезка времени $\tau = t_0 - t_1$. Таким образом, для любого отрезка времени $[t_0, t_1]$ длины τ она принимает одинаковые значения.

Теорема об управляемости позволяет находить или оценивать такой отрезок времени $I = [t_0, t_1]$, на котором объект является управляемым. Проиллюстрируем это на примерах.

Пример 1. Пусть уравнение (8.1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = -x^2, \\ \dot{x}^2 = x^1 + v, \quad |v| \leqslant 1, \end{cases} \tag{8.7}$$

а множества M_0 и M_1 заданы условиями

$$M_0 = \{\boldsymbol{x} \in E^2 : \; x^1 = -5, \; |x^2| \leqslant 1\}, \qquad M_1 = \{\mathbf{0}\}.$$

Опорные функции множеств M_0, M_1 и U в данном случае имеют вид

$$c(M_0, \psi) = -5\psi^1 + |\psi^2|, \qquad c(M_1, \psi) = 0, \qquad c(U, \psi) = |\psi^2|.$$

Экспоненциал матрицы $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ уже подсчитан (см. пример 2 из лекции 6) и имеет вид

$$e^{tA^*} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Произвольный вектор $\psi \in S \subset E^2$ зададим в виде $\psi = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. В результате из формулы (8.3) получим, что неравенство (8.4) выполняется тогда и только тогда, когда для любого параметра $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ при $\tau = t_1 - t_0$ выполняется неравенство

$$\varphi(\psi) = \varphi(\alpha) = \\ = -5\cos(\alpha - \tau) + |\sin(\alpha - \tau)| + \int_0^\tau |\sin(\alpha - s)|\, ds \geqslant 0.$$

Ясно, что если $\tau = t_1 - t_0 \geqslant 3\pi$, то это неравенство заведомо выполняется для любого $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$.

Таким образом, если отрезок времени $[t_0, t_1]$ имеет длину τ, то объект, описываемый уравнением (8.7), заведомо является управляемым на этом отрезке.

Пример 2. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 + u^1, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2, \quad \boldsymbol{u} \in S_1(\boldsymbol{0}), \end{cases} \tag{8.8}$$

с множеством начальных состояний $M_0 = S_\pi((3\pi, 0))$ и множеством конечных состояний $M_1 = S_\pi(\boldsymbol{0})$ (рис. 35). Требуется определить отрезок времени $[t_0, t_1]$, на котором система является управляемой из множества M_0 на множество M_1. Пусть $\tau = t_1 - t_0$.

Экспоненциал матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ имеет вид

$$e^{tA^*} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

а опорные функции множеств U, M_0, M_1 задаются выражениями

$$c(U, \boldsymbol{\psi}) = \|\boldsymbol{\psi}\|, \quad c(M_0, \boldsymbol{\psi}) = 3\pi\psi^1 + \pi\|\boldsymbol{\psi}\|, \quad c(M_1, \boldsymbol{\psi}) = \pi\|\boldsymbol{\psi}\|.$$

Подставляя эти данные в формулу (8.3), получим функцию

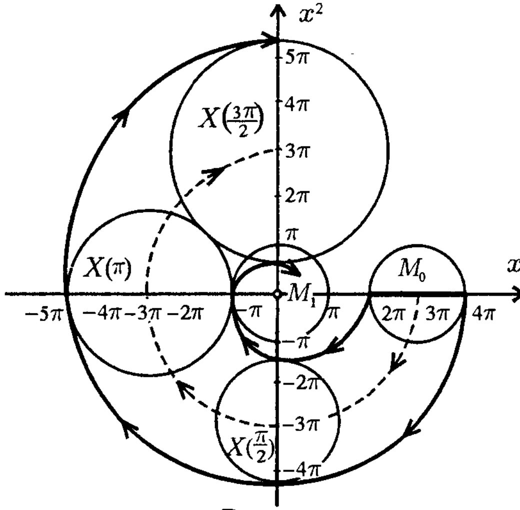


Рис. 35

управляемости в следующем виде:

$$\varphi(\boldsymbol{\psi}) = 3\pi(\psi^1 \cos\tau - \psi^2 \sin\tau) + 2\pi\|\boldsymbol{\psi}\| + \tau\|\boldsymbol{\psi}\|.$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$\varphi_0 = \min_{\boldsymbol{\psi}\in S} \varphi(\boldsymbol{\psi}) = \tau - \pi.$$

Следовательно, система (8.8) является управляемой из M_0 в M_1 на любом отрезке времени $[t_0, t_1]$, длина которого τ больше или равна π, и не является управляемой ни на каком отрезке времени $[t_0, t_1]$, длина которого меньше π.

Проиллюстрируем эти выкладки геометрически. Построим для этого множество достижимости $X(t)$. Для этого, подставив полученные данные в формулу (7.6) из лекции 7, получим следующее выражение для опорной функции множества достижимости в зависимости от длины отрезка времени $\tau = t - t_0$:

$$c(X(t), \boldsymbol{\psi}) = 3\pi\cos\tau\cdot\psi^1 - 3\pi\sin\tau\cdot\psi^2 + (\pi+\tau)\|\boldsymbol{\psi}\|.$$

Таким образом, множество достижимости $X(t)$ есть круг радиуса $r(\tau) = \pi + \tau$ с центром в точке $a(\tau) = (3\pi\cos\tau, -3\pi\sin\tau)$. Это множество изображено на рис. 35. Из рисунка видно, что при $\tau < \pi$ множества $X(t)$ и M_1 не пересекаются, при $\tau = \pi$ происходит их первое касание и при $\tau \geqslant \pi$ эти множества всегда пересекаются.

8.2. Лемма о внутренней точке интеграла

Итак, для решения общей задачи управляемости получены необходимые и достаточные условия. Рассмотрим один частный, но часто встречающийся на практике случай управляемости, а именно, локальную управляемость. Для ее изучения потребуется следующая лемма.

Лемма о внутренней точке интеграла. *Пусть заданы A — квадратная матрица размером $n \times n$, $\boldsymbol{v}$ — произвольный вектор из пространства E^n и число $\tau > 0$. Тогда*

$$0 \in \operatorname{int} \int_0^\tau e^{sA}\{-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\}\, ds \tag{8.9}$$

тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}, \ldots, A^{n-1}\boldsymbol{v}$ линейно независимы.

Здесь под знаком интеграла в выражении (8.9) стоит многозначное отображение e^{sA}, которое получается для каждого $0 \leqslant s \leqslant \tau$ как образ множества $\{-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\}$, состоящего из двух точек, при линейном преобразовании e^{sA}.

Доказательство. Обозначим

$$F = \int_0^\tau e^{sA}\{-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\}\, ds.$$

Согласно теореме 1 (см. лекцию 5) множество F является непустым выпуклым и компактным подмножеством пространства E^n. Таким образом, в силу следствия из свойства 14 опорных функций (см. лекцию 3), точка $\boldsymbol{x} = 0$ является внутренней для множества F тогда и только тогда, когда

$$c(F, \boldsymbol{\psi}) > 0$$

для любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in S$.

Найдем опорную функцию множества F. Согласно теореме 2 (см. лекцию 5) и свойству 4 опорных функций имеем соотношение

$$c(F,\psi) = c\left(\int_0^\tau e^{sA}\{-v,v\}\,ds,\psi\right) = \int_0^\tau c(e^{sA}\{-v,v\},\psi)\,ds =$$

$$= \int_0^\tau c(\{-v,v\},e^{sA^*}\psi)\,ds.$$

Опорная функция множества $\{-v,v\}$ известна, она имеет вид

$$c(\{-v,v\},\psi) = |\langle v,\psi\rangle|.$$

Таким образом, получаем равенство

$$c(F,\psi) = \int_0^\tau |\langle v, e^{sA^*}\psi\rangle|\,ds = \int_0^\tau |\langle e^{sA}v,\psi\rangle|\,ds.$$

Следовательно, $\mathbf{0} \in \operatorname{int} F$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\tau |\langle e^{sA}v,\psi\rangle|\,ds > 0$$

для любого вектора $\psi \in S$. Поскольку подынтегральная функция в последнем неравенстве непрерывна и неотрицательна, это неравенство эквивалентно выполнению условия

$$\langle e^{tA}v,\psi\rangle \not\equiv 0 \tag{8.10}$$

на отрезке $[0,\tau]$ для любого вектора $\psi \in S$. Покажем, что для этого необходимо и достаточно, чтобы векторы $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ были линейно независимы.

Докажем необходимость. Предположим противное, т.е. пусть условие (8.10) выполнено, а векторы $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ линейно зависимы. Тогда существует вектор $\psi \in S$ такой, что

$$\langle v,\psi\rangle = \langle Av,\psi\rangle = \ldots = \langle A^{n-1}v,\psi\rangle = 0. \tag{8.11}$$

Из курса алгебры (теорема Гамильтона — Келли) известно, что для матрицы A размером $n\times n$ все матрицы A^p при $p \geqslant n$

являются линейными комбинациями матриц $E, A, \ldots, A^{n-1}$. По определению экспоненциала e^{tA} (см. лекцию 6) имеем равенство

$$e^{tA} = E + tA + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1} + \frac{t^n}{n!}A^n + \ldots =$$
$$= c_1(t)E + c_2(t)A + \ldots + c_n(t)A^{n-1}.$$

В силу соотношений (8.11) отсюда получаем, что

$$\langle e^{tA}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}\rangle = c_1(t)\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}\rangle + c_2(t)\langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}\rangle + \ldots + c_n(t)\langle A^{n-1}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}\rangle \equiv 0,$$

а это противоречит условию (8.10).

Достаточность также докажем от противного. Пусть векторы $\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}, \ldots, A^{n-1}\boldsymbol{v}$ линейно независимы, но существует вектор $\boldsymbol{\psi} \in S$ такой, что

$$\langle e^{tA}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}\rangle \equiv 0$$

на отрезке $[0, \tau]$. Поскольку $\tau > 0$, продифференцируем полученное тождество $n-1$ раз по t и положим во всех производных $t = 0$. Тогда, очевидно, имеем

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}\rangle = \langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}\rangle = \ldots = \langle A^{n-1}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}\rangle = 0.$$

Так как вектор $\boldsymbol{\psi} \neq 0$, отсюда следует, что векторы $\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}, \ldots$ $\ldots, A^{n-1}\boldsymbol{v}$ линейно зависимы. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

8.3. Локальная управляемость

Предположим, что конечное множество $M_1 \in \Omega(E^n)$ задано, а начальное множество $M_0 = \{\boldsymbol{x}_0\}$, где $\boldsymbol{x}_0$ — произвольная точка из некоторой окрестности множества M_1. Исследуем возможность перехода из некоторой окрестности $S_\varepsilon(M_1)$ на множество M_1 для объекта, описываемого уравнением (8.1), при всевозможных допустимых управлениях $u(t)$.

Управляемый объект, описываемый уравнением (8.1), называется *локально управляемым на множество* M_1 *на отрезке времени* $[t_0, t_1]$, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой точки $\boldsymbol{x}_0 \in M_1 + S_\varepsilon(\mathbf{0})$ объект является управляемым на отрезке $[t_0, t_1]$ из начального множества $M_0 = \{\boldsymbol{x}_0\}$ на конечное множество M_1. Это означает, что для любой точки $\boldsymbol{x}_0 \in M_1 + S_\varepsilon(\mathbf{0})$

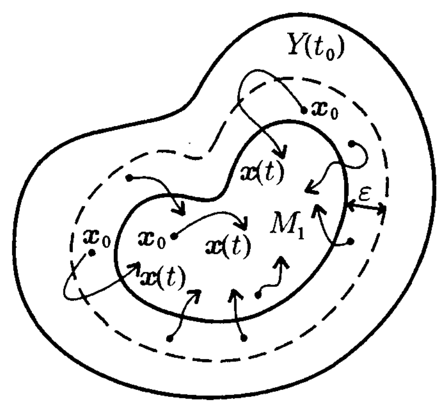


Рис. 36

существует допустимое управление $\boldsymbol{u}(t)$ такое, что соответствующее решение $\boldsymbol{x}(t)$ уравнения (8.1) перейдет из точки $\boldsymbol{x}_0$ в некоторую точку множества M_1 на отрезке времени $[t_0, t_1]$ (рис. 36).

Замечание. Данное определение локальной управляемости на множество M_1 эквивалентно тому, что

$$M_1 \subset \operatorname{int} Y(t_0), \qquad (8.12)$$

где $Y(t_0)$ — множество управляемости. Действительно, если объект локально управляем на множество M_1, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что любая точка $\boldsymbol{x}_0 \in M_1 + Y(t_0)$ принадлежит множеству управляемости $Y(t_0)$, следовательно, справедливо включение

$$M_1 + S_\varepsilon(\mathbf{0}) \subset Y(t_0), \qquad (8.13)$$

и, следовательно, включение (8.12). В другую сторону, если выполняется включение (8.12), то для любой точки $\boldsymbol{m} \in M_1$ существует число $\varepsilon(\boldsymbol{m}) > 0$ такое, что справедливо соотношение $\widetilde{S}_{\varepsilon(\boldsymbol{m})}(\boldsymbol{m}) \subset Y(t_0)$. Здесь $\widetilde{S}_{\varepsilon(\boldsymbol{m})}(\boldsymbol{m})$ — открытый шар радиуса $\varepsilon(\boldsymbol{m})$ с центром в точке $\boldsymbol{m}$. Совокупность всех шаров $\widetilde{S}_{\varepsilon(\boldsymbol{m})}(\boldsymbol{m})$ при $\boldsymbol{m} \in M_1$ образует открытое покрытие компактного множества M_1. По соответствующей теореме из курса математического анализа из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $\widetilde{S}_{\varepsilon(\boldsymbol{m}_1)}(\boldsymbol{m}_1), \ldots, \widetilde{S}_{\varepsilon(\boldsymbol{m}_r)}(\boldsymbol{m}_r)$. Выбирая $\varepsilon = \min_{1 \leqslant i \leqslant r} \varepsilon(\boldsymbol{m}_i)$, получаем включение (8.13), эквивалентное локальной управляемости объекта (8.1) на множество M_1.

В уравнении (8.1) можно сделать замену переменных $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1$. Уравнение объекта опять будет иметь вид (8.1), только множество U сдвигается на постоянный вектор $A\boldsymbol{x}_1$. Поэтому достаточно рассмотреть лишь один случай локальной управляемости при $\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}$.

Итак, наш объект является локально управляемым в точке $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, если существует число

$\varepsilon > 0$ такое, что для любой точки $\boldsymbol{x}_0 \in S_\varepsilon(\mathbf{0})$ объект является управляемым на отрезке времени $[t_0, t_1]$ из начального множества $M_0 = \{\boldsymbol{x}_0\}$ на конечное множество $M_1 = \{\mathbf{0}\}$.

Для решения общей задачи управляемости мы доказали теорему об управляемости. Применяя эту теорему и лемму о внутренней точке интеграла, получим достаточное условие локальной управляемости в точке $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Теорема о локальной управляемости. *Пусть существует вектор $\boldsymbol{v} \in E^n$ такой, что выполнены следующие два условия:*

1) *векторы $-\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}$ принадлежат множеству U;*

2) *векторы $\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}, \ldots, A^{n-1}\boldsymbol{v}$ линейно независимы.*

Тогда объект является локально управляемым в точке $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ на любом отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, $\tau = t_1 - t_0 > 0$.

Доказательство. По теореме об управляемости объект является локально управляемым в точке $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\boldsymbol{x}_0 \in S_\varepsilon(\mathbf{0})$ и любого $\boldsymbol{\psi} \in S$ выполняется условие

$$c(\{\boldsymbol{x}_0\}, e^{tA^*}\boldsymbol{\psi}) + c(\{\mathbf{0}\}, -\boldsymbol{\psi}) + \int_0^\tau c(U, e^{sA^*}\boldsymbol{\psi})\, ds \geqslant 0.$$

Вычисляя опорные функции множеств $\{\boldsymbol{x}_0\}$ и $\{\mathbf{0}\}$, преобразуем это неравенство в следующее:

$$\int_0^\tau c(U, e^{sA^*}\boldsymbol{\psi})\, ds \geqslant -\langle \boldsymbol{x}_0, e^{\tau A^*}\boldsymbol{\psi}\rangle. \tag{8.14}$$

Покажем существование $\varepsilon > 0$ такого, что неравенство (8.14) выполняется для любого $\boldsymbol{x}_0 \in S_\varepsilon(\mathbf{0})$ и любого $\boldsymbol{\psi} \in S$. Для этого покажем, что левая часть неравенства (8.14), не зависящая от ε, для любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in S$ больше или равна некоторого числа $\alpha > 0$, а правая часть неравенства (8.14) выбором числа $\varepsilon > 0$ может быть сделана сколь угодно малой.

По предположению 1) теоремы выполняется включение $\{-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\} \in U$. Согласно свойству 6 опорных функций (см. лекцию 3) для любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in S$ получаем неравенство

$$c(\{-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\}, \boldsymbol{\psi}) \leqslant c(U\cancel{(t)}, \boldsymbol{\psi}).$$

$\{-\sigma, \sigma\} \subset U$

Таким образом, справедливо соотношение

$$\int_0^\tau c(U, e^{sA^*}\psi)\,ds \geqslant \int_0^\tau c(\{-v, v\}, e^{sA^*}\psi)\,ds =$$

$$= c\left(\int_0^\tau e^{sA}\{-v, v\}\,ds, \psi\right). \quad (8.15)$$

По предположению 2) теоремы векторы $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ линейно независимы. По лемме о внутренней точке интеграла это означает, что

$$\mathbf{0} \in \operatorname{int} \int_0^\tau e^{sA}\{-v, v\}\,ds.$$

Таким образом, в силу свойства 14 опорных функций (см. лекцию 3) имеем строгое неравенство

$$c\left(\int_0^\tau e^{sA}\{-v, v\}\,ds, \psi\right) > 0$$

для любого вектора $\psi \in S$. Но опорная функция непрерывна по вектору ψ, а единичная сфера S — компактное множество в пространстве E^n, поэтому существует число $\alpha > 0$ такое, что

$$c\left(\int_{t_0}^{t_1} e^{-sA}\{-v, v\}\,ds, \psi\right) \geqslant \alpha > 0$$

для всех векторов $\psi \in S$. Согласно соотношению (8.15) для любого вектора $\psi \in S$ имеем оценку

$$\int_0^\tau c(U, e^{sA^*}\psi)\,ds \geqslant \alpha > 0. \quad (8.16)$$

Рассмотрим теперь правую часть неравенства (8.14). Так как $x_0 \in S_\varepsilon(\mathbf{0})$, то для любого вектора $\psi \in S$ справедливо соотношение

$$\langle x_0, \psi\rangle \leqslant c(S_\varepsilon(\mathbf{0}), \psi) = \varepsilon\|\psi\|.$$

$|\langle x_0, \psi\rangle| \leq \|x_0\| \leq \varepsilon$ в силу нер-ва Коши-Буняковского

Таким образом, получаем оценки

$$-\langle \boldsymbol{x}_0, e^{\tau A^*}\boldsymbol{\psi}\rangle = \langle \boldsymbol{x}_0, -e^{\tau A^*}\boldsymbol{\psi}\rangle \leqslant \varepsilon\| - e^{\tau A^*}\boldsymbol{\psi}\| \leqslant \varepsilon\|e^{\tau A^*}\| \cdot \|\boldsymbol{\psi}\|. \tag{8.17}$$

Следовательно, если выбрать число $\varepsilon \leqslant \frac{\alpha}{\|e^{\tau A^*}\|}$, то для любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in S$ получим неравенство

$$-\langle \boldsymbol{x}_0, e^{\tau A^*}\boldsymbol{\psi}\rangle \leqslant \alpha.$$

Сравнивая полученное неравенство с условием (8.16), заключаем, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что соотношение (8.14) выполняется для любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in S$. А это означает, что объект является локально управляемым в точке $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ на отрезке времени $[t_0, t_1]$. Теорема доказана.

Теорема о локальной управляемости позволяет для многих объектов довольно просто доказывать локальную управляемость.

Пример 3. Докажем, что объект, описываемый системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2, \quad |u^2| \leqslant 1, \end{cases}$$

является локально управляемым в точке $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ на любом отрезке времени $[t_0, t_1]$, $t_0 \neq t_1$. Покажем, что для такого объекта выполняются предположения теоремы о локальной управляемости. Действительно, если $\boldsymbol{v} = (0, 1)$, то векторы $-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}$ принадлежат множеству $U = \{\boldsymbol{u} \in E^2 : u^1 = 0, |u^2| \leqslant 1\}$, т.е. первое предположение выполнено. Проверим, что векторы $\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}$ линейно независимы. Действительно, векторы

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Итак, объект является локально управляемым в точке $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Заметим, что теорема о локальной управляемости является лишь достаточным условием локальной управляемости, т.е. объект может быть локально управляемым, а предположения указанной теоремы при этом могут не выполняться. В этом случае для доказательства локальной управляемости нужно использовать общую теорему об управляемости. Проиллюстрируем это на примерах.

Пример 4. Рассмотрим объект, поведение которого описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2, \quad 0 \leqslant u^2 \leqslant 1. \end{cases} \tag{8.18}$$

Покажем, что этот объект является локально управляемым в точке $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ на отрезке времени $I = [0, 2\pi]$. Предположения теоремы о локальной управляемости для данного объекта не выполняются. Действительно, множество U имеет вид

$$U = \{\boldsymbol{u} \in E^2 : \ u^1 = 0, \ 0 \leqslant u^2 \leqslant 1\}.$$

Для этого множества единственный вектор $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ удовлетворяет первому предположению теоремы, но этот вектор не удовлетворяет второму предположению теоремы.

Локальную управляемость докажем, используя общую теорему об управляемости. Покажем, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\boldsymbol{x}_0 \in S_\varepsilon(\boldsymbol{0})$ объект является управляемым из множества $M_0 = \{\boldsymbol{x}_0\}$ на множество $M_1 = \{\boldsymbol{0}\}$ на отрезке времени $I = [0, 2\,\pi]$. Для этого достаточно проверить неравенство (8.4) для любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in S$. Экспоненциал e^{tA^*} в данном случае имеет вид

$$e^{tA^*} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Опорные функции множеств M_0, M_1, U задаются соотношениями

$$c(M_0, \boldsymbol{\psi}) = \langle \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\psi} \rangle, \quad c(M_1, \boldsymbol{\psi}) = 0, \quad c(U, \boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{2}\psi^2 + \frac{1}{2}|\psi^2|.$$

Записав произвольный вектор $\boldsymbol{\psi} \in S \subset E^2$ в виде $\boldsymbol{\psi} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ и подставив в формулу (8.3), получим следующее выражение для функции управляемости:

$$\varphi(\boldsymbol{\psi}) = \varphi(\alpha) = \left\langle \boldsymbol{x}_0, \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right\rangle + \\ + \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}\sin(\alpha + s) + \frac{1}{2}|\sin(\alpha + s)|\right] ds.$$

Интеграл в этом выражении равен 2 при всех $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, следовательно,

$$\varphi_0 = \min_{\psi \in S} \varphi(\boldsymbol{\psi}) = -\|\boldsymbol{x}_0\| + 2.$$

Итак, можно выбрать $\varepsilon = 2$, и при этом из любой точки $\boldsymbol{x}_0 \in S_2(\mathbf{0})$ на отрезке времени $[0, 2\pi]$ можно перейти в точку $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ по решению уравнения (8.18) при допустимом управлении $\boldsymbol{u}(t)$. Таким образом, объект является локально управляемым в точке $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ на отрезке времени $[0, 2\pi]$.

Отметим, что в примере 4 локальная управляемость имеет место не на любом отрезке времени $[t_0, t_1]$. Если длину этого отрезка уменьшать, то в какой-то момент локальная управляемость исчезнет.

Пример 5. Пусть $\mathbf{0} \in \operatorname{int} U$. Покажем, что такой объект всегда является управляемым в точке $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ для любой матрицы A размером $n \times n$ на любом ненулевом отрезке времени $[t_0, t_1]$.

Теорема о локальной управляемости здесь не всегда применима, например, для матрицы $A = 0$ ее предположения не выполнены. Воспользуемся общей теоремой об управляемости.

Согласно предположению, существует число $\delta > 0$ такое, что $S_\delta(\mathbf{0}) \subset U$, следовательно, справедливо неравенство

$$c(U, \boldsymbol{\psi}) \geqslant c(S_\delta(\mathbf{0}), \boldsymbol{\psi}) = \delta\|\boldsymbol{\psi}\|.$$

Подставляя это неравенство и выражения

$$c(M_0, \boldsymbol{\psi}) = \langle \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\psi} \rangle, \quad c(M_1, \boldsymbol{\psi}) = 0$$

в формулу (8.3), для функции управляемости

$$\varphi(\boldsymbol{\psi}) = \langle \boldsymbol{x}_0, e^{\tau A^*} \boldsymbol{\psi} \rangle + \int_0^\tau c(U, e^{sA^*} \boldsymbol{\psi})\, ds$$

с учетом формулы (8.17) получим следующее неравенство:

$$\varphi(\boldsymbol{\psi}) \geqslant -\varepsilon \|e^{\tau A^*}\| \cdot \|\boldsymbol{\psi}\| + \delta \int_0^\tau \|e^{sA^*} \boldsymbol{\psi}\|\, ds.$$

В силу непрерывности при всех $\boldsymbol{\psi} \in S$ справедливо неравенство

$$\int_0^\tau \|e^{sA^*} \boldsymbol{\psi}\|\, ds \geqslant \alpha > 0.$$

Таким образом, если выбрать

$$0 < \varepsilon \leqslant \frac{\delta\alpha}{\|e^{\tau A^*}\|},$$

то при всех $\boldsymbol{x}_0 \in S_\varepsilon(\mathbf{0})$ и всех $\boldsymbol{\psi} \in S$ получим неравенство $\varphi(\boldsymbol{\psi}) \geqslant 0$. Следовательно, объект является локально управляемым.

Если нужно исследовать локальную управляемость точки $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, то, делая замену переменных $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1$ в уравнении (8.1), получаем новый управляемый объект

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \in U' = U + A\boldsymbol{x}_1. \tag{8.19}$$

Его управляемость в точке $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ эквивалентна управляемости уравнения (8.1) в точке $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1$.

Пример 6. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = u^2, \quad |u^2| \leqslant 1. \end{cases} \tag{8.20}$$

Покажем, что на любом ненулевом отрезке времени эта система является локально управляемой в любой точке прямой $x^2 = 0$ на плоскости E^2.

Возьмем произвольную точку $\boldsymbol{x}_0 = (x^1, 0)$ этой прямой и вычислим множество U'. Поскольку

$$A\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

множества U' и U совпадают. Таким образом, локальная управляемость в любой точке $\boldsymbol{x}_0 = (x^1, 0)$ имеет место, если доказана управляемость системы (8.20) в точке $\mathbf{0}$.

Выберем вектор $\boldsymbol{v} = (0, 1)$. Для него выполняются оба предположения теоремы о локальной управляемости. Действительно, оба вектора $\pm\boldsymbol{v}$ принадлежат множеству $U = \{\boldsymbol{u} \in E^2 : u^1 = 0,\ |u^2| \leqslant 1\}$, а векторы

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Таким образом, объект (8.20) является локально управляемым в любой точке $(\boldsymbol{x}_1, 0) \in E^2$.

Замечание. Рассмотрим произвольное множество $M_1 \in \in \Omega(E^n)$. Если для каждой его точки $\boldsymbol{x}_1 \in M_1$ объект, описываемый уравнением (8.1), является локально управляемым в точку $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1$ на отрезке времени $[t_0, t_1]$, то он будет также локально управляемым на этом же отрезке времени $[t_0, t_1]$ на все конечное множество M_1. Действительно, в силу локальной управляемости в произвольной точке $\boldsymbol{x}_1 \in M_1$ выполняется включение $\boldsymbol{x}_1 \in \operatorname{int} Y(t_0)$, а оно эквивалентно локальной управляемости на множество M_1 в силу его компактности (см. замечание в начале данного раздела).

Пример 7. Покажем, что управляемая система

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \in S_1(\mathbf{0})$$

локально управляема на любое конечное множество $M_1 \in \Omega(E^n)$ на любом отрезке времени $[t_0, t_1]$.

Возьмем произвольную точку $\boldsymbol{x}_1 \in M_1$. В данном примере $A = 0$, поэтому $U' = U$ (см. формулу (8.19)) и из локальной управляемости в точке $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ следует его локальная управляемость в любой точке $\boldsymbol{x}_1 \in M_1$. В силу данного выше замечания теперь объект является локально управляемым на множество M_1.

8.4. Задачи

1. Найдите отрезок времени $[t_0, t_1]$, на котором объект, описываемый системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 + u^1, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2, \quad \boldsymbol{u} \in S_1(\mathbf{0}), \end{cases}$$

является управляемым из начального множества $M_0 = \{\mathbf{0}\}$ на конечное множество $M_1 = \{\boldsymbol{x} \in E^2 : x^1 = 0,\ 10 \leqslant x^2 \leqslant 12\}$.

2. Является ли объект, описываемый системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = u^1, \\ \dot{x}^2 = -x^2 + u^2, \quad |u^1| \leqslant 1,\ |u^2| \leqslant 1, \end{cases}$$

управляемым из начального множества $M_0 = \{(-3, 4)\}$ на конечное множество $M_1 = \{\mathbf{0}\}$ на отрезке времени $[0, 3]$?

3. Является ли объект, описываемый системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 + u^1, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2, \qquad \boldsymbol{u} \in S_1(\mathbf{0}) \subset E^3, \\ \dot{x}^3 = u^3, \end{cases}$$

управляемым из начального множества $M_0 = S_1(\mathbf{0}) \subset E^3$ на конечное множество $M_1 = \{(4, 2, 2)\}$ на отрезке времени $[0, 4\pi]$?

4. Является ли объект, описываемый системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = -x^1 - \pi x^2 + u^1, \\ \dot{x}^2 = \pi x^1 - x^2 + u^2, \qquad \boldsymbol{u} \in S_1(\mathbf{0}) \subset E^2, \end{cases}$$

управляемым из начального множества

$$M_0 = \{\boldsymbol{x} \in E^2 : |x^1 - 8| \leqslant 1, |x^2| \leqslant 1\}$$

на конечное множество

$$M_1 = \{\boldsymbol{x} \in E^2 : |x^1| + |x^2 - 1| \leqslant 1\}$$

на отрезке времени $[-1, 1]$?

5. Докажите, что объект, описываемый системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = u^2, \quad |u^2| \leqslant 1, \end{cases}$$

является локально управляемым на конечное множество $M_1 = S_{\frac{1}{2}}(\mathbf{0})$ на любом ненулевом отрезке времени.

6. Докажите, что объект, описываемый системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 + u^1, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2, \quad \boldsymbol{u} \in S_1((1, 0)), \end{cases}$$

является локально управляемым в точке $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

7. Докажите, что если $\mathbf{0} \notin \operatorname{conv} U$, то объект, описываемый уравнением (8.1), не является локально управляемым, когда отрезок времени $[t_0, t_1]$ достаточно мал.

8*. Пусть множество U выпукло и точка $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ лежит на границе U, т.е. $\mathbf{0} \in \partial U$. Рассмотрим множество

$$K(U) = \{\boldsymbol{x} \in E^n : \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \in U, \lambda \geqslant 0\}.$$

Докажите, что если множество $K(U)$ не содержит ни одной прямой из пространства E^n, то объект, описываемый уравнением (8.1), не является локально управляемым на отрезке времени $[t_0, t_1]$ достаточно малой длины.

9. Пусть $\mathbf{0} \in \operatorname{conv} U$ и объект, описываемый уравнением (8.1), является управляемым из начального множества $M_0 = \{\mathbf{0}\}$ на конечное множество $M_1 \in \Omega(E^n)$ на отрезке времени $[0, \tau]$. Докажите, что этот объект будет управляемым на любом отрезке времени $[0, \tau']$, где $\tau' > \tau$.

10. Пусть объект, описываемый уравнением (8.1), является локально управляемым на конечное множество M_1. Докажите, что для множества управляемости $Y(t)$ при $t' > t$ справедливо включение

$$Y(t) \subset \operatorname{int} Y(t').$$

11*. Пусть объект, описываемый уравнением (8.1), является локально управляемым в точке $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Является ли он локально управляемым на конечное множество $M_1 = S_\varepsilon(\mathbf{0})$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$?

ЛЕКЦИЯ 9

- *Теорема существования оптимального управления в линейной задаче быстродействия.*
- *Принцип максимума Понтрягина, его геометрический смысл и эквивалентные формулировки.*
- *Теорема о необходимых условиях оптимальности.*

9.1. Существование оптимального управления

В предыдущей лекции был рассмотрен первый основной вопрос математической теории оптимального управления — вопрос об управляемости. Если задача управляемости решается положительно, т.е. существует хотя бы одно допустимое управление, переводящее из начального множества M_0 на конечное множество M_1, то можно перейти ко второму основному вопросу — к вопросу существования оптимального управления.

Напомним постановку линейной задачи быстродействия. Поведение объекта описывается уравнением

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}, \tag{9.1}$$

где $\boldsymbol{x}$ — n-мерный вектор фазового состояния объекта, $\boldsymbol{u}$ — n-мерный вектор управления, A — матрица размером $n \times n$. Допустимым управлением $\boldsymbol{u}(t)$ называется произвольная измеримая функция, удовлетворяющая включению $\boldsymbol{u}(t) \in U$, где $U \in \Omega(E^n)$. Начальный момент t_0 зафиксирован и заданы начальное и конечное множества $M_0, M_1 \in \Omega(E^n)$. Задача быстродействия заключается в нахождении допустимого управления, переводящего объект из множества M_0 на множество M_1 за минимальное время.

Теорема существования оптимального управления. *Предположим, что объект является управляемым из множества M_0 на множество M_1 на некотором отрезке времени $[t_0, t_1]$. Тогда существует оптимальное управление $\boldsymbol{u}^*(t)$,*

$t \in [t_0, t^*]$, переводящее объект из множества M_0 на множество M_1 за минимальное время $t^* - t_0$.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$T = \{t \geqslant t_0 : \ X(t) \cap M_1 \neq \emptyset\},$$

где $X(t)$ — множество достижимости управляемой системы (9.1) на отрезке времени $[t_0, t]$ из начального множества M_0. По предположению теоремы множество T непусто. Обозначим через t^* нижнюю грань моментов времени $t \in T$, т.е.

$$t^* = \inf_{t \in T} t.$$

Нижняя грань t^* существует, поскольку множество T ограничено снизу моментом времени t_0. Таким образом, за время, строго меньшее чем $t^* - t_0$, невозможно перейти из множества M_0 на множество M_1 с помощью какого-либо допустимого управления. Теперь нужно доказать, что существует допустимое управление $\boldsymbol{u}^*(t)$, переводящее объект из множества M_0 на множество M_1 ровно за время $t^* - t_0$, т.е. на отрезке времени $[t_0, t^*]$, поскольку начальный момент времени t_0 предполагается фиксированным.

Так как t^* является нижней гранью моментов времени $t \in T$, то существует последовательность моментов t_k, сходящаяся к точке t^*, т.е. $t_k \to t^*$ при $k \to \infty$, причем для каждого t_k выполняется условие

$$X(t_k) \cap M_1 \neq \emptyset.$$

Пусть для каждого k некоторая точка $\boldsymbol{x}_k$ принадлежит этому пересечению, т.е.

$$\boldsymbol{x}_k \in X(t_k) \cap M_1. \tag{9.2}$$

Поскольку $\boldsymbol{x}_k \in M_1$, а множество M_1 — компакт, из последовательности $\{\boldsymbol{x}_k\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке

$$\boldsymbol{x}^* \in M_1. \tag{9.3}$$

Эту подпоследовательность снова обозначим через $\{\boldsymbol{x}_k\}$.

Пусть задано произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как последовательность $\{\boldsymbol{x}_k\}$ сходится к точке $\boldsymbol{x}^*$, то начиная с некоторого номера k_1 будет выполняться условие $\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}_k\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, в силу формулы (9.2) имеем соотношение

$$\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{x}_k \in S_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) + X(t_k). \tag{9.4}$$

Множество достижимости $X(t)$ непрерывно зависит от времени t (свойство 7 множеств достижимости из лекции 7). Поэтому, начиная с некоторого номера k_2, будет выполняться включение

$$X(t_k) \subset X(t^*) + S_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$$

(см. формулу (4.2) из лекции 4). Отсюда в силу соотношения (9.4) получаем включение

$$\boldsymbol{x}^* \in X(t^*) + S_\varepsilon(0).$$

Таким образом, для любого числа $\varepsilon > 0$ справедливо представление

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{y}_k, \quad \boldsymbol{x}_k \in X(t^*), \quad \boldsymbol{y}_k \in S_\varepsilon(0).$$

Последовательность точек $\{\boldsymbol{x}_k\}$ сходится к точке $\boldsymbol{x}^*$ при $k \to \infty$, так как

$$\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}_k\| = \|\boldsymbol{y}_k\| \leqslant \varepsilon \to 0.$$

Множество $X(t^*)$ компактно (свойство 2 множеств достижимости из лекции 7), следовательно, справедливо включение $\boldsymbol{x}^* \in X(t^*)$. Окончательно с учетом включения (9.3) получаем условие

$$X(t^*) \cap M_1 \neq \emptyset.$$

Это и означает по определению множества достижимости, что существует допустимое управление $\boldsymbol{u}^*(t)$, переводящее объект из множества M_0 на множество M_1 на отрезке времени $[t_0, t^*]$. Теорема доказана.

Отметим здесь, что теорема существования оптимального управления доказана для любых непустых и компактных множеств U, M_0, M_1.

9.2. Принцип максимума Понтрягина

Мы уже выяснили вопрос существования оптимального управления в линейной задаче быстродействия. Теперь, если оптимальное управление существует, нужно научиться его находить. Для этого удобно использовать необходимые условия оптимальности. Это значит, что нужно найти такие условия, которым заведомо удовлетворяет любое оптимальное управление, а затем искать оптимальное управление в множестве управлений, удовлетворяющих этим необходимым условиям.

Здесь можно привести аналогию с задачей поиска глобального минимума гладкой скалярной функции $f(x)$ на числовой прямой $x \in E^1$. Если гладкая функция $f(x)$ достигает минимума в точке x^*, то выполняется условие $f'(x^*) = 0$. Таким образом, соотношение

$$f'(x) = 0 \tag{9.5}$$

является необходимым условием минимума. Этому соотношению, кроме точки глобального минимума x^*, удовлетворяют все точки локального минимума, все точки максимума, а также все точки перегиба, в которых касательная к графику функции $f(x)$ горизонтальна. Однако в конкретных практических задачах соотношению (9.5), как правило, удовлетворяет конечное число точек, а из них даже простым перебором можно найти точку глобального минимума.

В рассматриваемой линейной задаче быстродействия также нужно найти минимум скалярной функции, т.е. время перехода $t_1 - t_0$ объекта из множества M_0 на множество M_1, только аргументами этой функции являются не скалярные величины, а всевозможные допустимые управления $\boldsymbol{u}(t) \in U$. Тем не менее в линейной задаче быстродействия можно получить очень эффективные необходимые условия оптимальности. Таким необходимым условием оптимальности является принцип максимума Понтрягина. Дадим его формулировку.

Принцип максимума Понтрягина. *Пусть на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$ задано некоторое допустимое управление $\boldsymbol{u}(t)$ такое, что соответствующее решение $\boldsymbol{x}(t)$ уравнения* (9.1) *переводит объект из начального множества M_0 на конечное множество M_1 на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, т.е. удовлетворяет граничным условиям $\boldsymbol{x}(t_0) \in M_0$, $\boldsymbol{x}(t_1) \in M_1$. Будем говорить, что пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, если существует такое нетривиальное решение $\boldsymbol{\psi}(t)$ вспомогательной системы дифференциальных уравнений*

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -A^* \boldsymbol{\psi}, \tag{9.6}$$

что выполнены следующие три условия:

1) *условие максимума*

$$\langle \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t)\rangle = c(U, \boldsymbol{\psi}(t)) \tag{9.7}$$

для почти всех $t \in I$;

2) *условие трансверсальности на множестве* M_0

$$\langle \boldsymbol{x}(t_0), \boldsymbol{\psi}(t_0)\rangle = c(M_0, \boldsymbol{\psi}(t_0)); \tag{9.8}$$

3) *условие трансверсальности на множестве* M_1

$$\langle \boldsymbol{x}(t_1), -\boldsymbol{\psi}(t_1)\rangle = c(M_1, -\boldsymbol{\psi}(t_1)). \tag{9.9}$$

Система дифференциальных уравнений (9.6) называется сопряженной, а ее решение $\boldsymbol{\psi}(t)$ — сопряженной функцией. Это решение $\boldsymbol{\psi}(t)$ называется нетривиальным, если $\boldsymbol{\psi}(t) \not\equiv 0$.

В силу теоремы 1 (см. лекцию 6) решение $\boldsymbol{\psi}(t)$ сопряженной линейной системы уравнений (9.6) существует на всем отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, единственное для любого начального значения $\boldsymbol{\psi}(t_0)$, и задается формулой Коши

$$\boldsymbol{\psi}(t) = e^{(t_0 - t)A^*}\boldsymbol{\psi}(t_0). \tag{9.10}$$

Это решение $\boldsymbol{\psi}(t)$ нетривиально, если $\boldsymbol{\psi}(t_0) \neq 0$, поскольку матрица $e^{(t_0-t)A^*}$ невырождена. Если начальное значение для сопряженной функции $\boldsymbol{\psi}(t)$ задано на правом конце отрезка $[t_0, t_1]$, т.е. в точке t_1, то решение $\psi(t)$ системы уравнений (9.6) имеет вид (см. формулу (6.9) из лекции 6)

$$\boldsymbol{\psi}(t) = e^{(t_1 - t)A^*}\boldsymbol{\psi}(t_1). \tag{9.11}$$

Это решение будет нетривиальным, если $\boldsymbol{\psi}(t_1) \neq 0$, также в силу невырожденности экспоненциала $e^{(t_1-t)A^*}$.

Пусть сопряженная функция $\boldsymbol{\psi}(t)$ задана. Посмотрим, какой геометрический смысл имеют условия (9.7)—(9.9). Условие (9.7) означает, что для почти всех моментов времени t на отрезке $[t_0, t_1]$ вектор $\boldsymbol{\psi}(t)$ является опорным вектором (см. лекцию 3) к множеству U в точке $\boldsymbol{u}(t)$, т.е. вектор $\boldsymbol{u}(t)$ выбирается из множества U таким образом, чтобы скалярное произведение $\langle \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t)\rangle$ было максимальным (рис. 37). Аналогично, условие трансверсальности на множестве M_0 (9.8) означает, что вектор $\boldsymbol{\psi}(t_0)$ является опорным вектором к множеству M_0 в точке

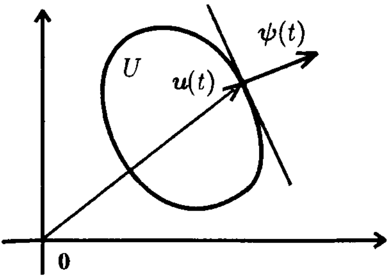


Рис. 37

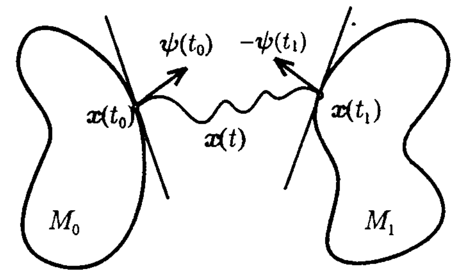


Рис. 38

$\boldsymbol{x}(t_0)$ (рис. 38), а условие трансверсальности на множестве M_1 (9.9) означает, что вектор $-\boldsymbol{\psi}(t_1)$ является опорным вектором к множеству M_1 в точке $\boldsymbol{x}(t_1)$ (см. рис. 38). Если множество M_0 состоит из одной точки, т.е. $M_0 = \{\boldsymbol{x}_0\}$, то условие трансверсальности (9.8) автоматически выполняется с любой сопряженной функцией $\boldsymbol{\psi}(t)$. Аналогичное утверждение справедливо и для множества M_1.

Приведем два утверждения, эквивалентных принципу максимума.

Лемма об эквивалентной формулировке принципа максимума Понтрягина. *Пусть допустимое управление $\boldsymbol{u}(t) \in U$, $t \in [t_0, t_1]$, таково, что соответствующее решение $\boldsymbol{x}(t)$ системы уравнений (9.1) удовлетворяет граничным условиям $\boldsymbol{x}(t_0) \in M_0$, $\boldsymbol{x}(t_1) \in M_1$. Пусть, далее, $\boldsymbol{\psi}(t)$ — некоторое решение сопряженной системы уравнений (9.6). Тогда следующие три утверждения эквивалентны:*

1) *пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет принципу максимума с сопряженной функцией $\boldsymbol{\psi}(t)$ на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$;*

2) *при всех $t \in I$ вектор $\boldsymbol{\psi}(t)$ является опорным вектором к множеству достижимости $X(t)$ в точке $\boldsymbol{x}(t)$, т.е. выполняется равенство*

$$\langle \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle = c(X(t), \boldsymbol{\psi}(t)). \tag{9.12}$$

Кроме того, выполнено условие трансверсальности на множестве M_1 (9.9);

3) *при всех $t \in I$ вектор $-\boldsymbol{\psi}(t)$ является опорным вектором к множеству управляемости $Y(t)$ в точке $\boldsymbol{x}(t)$, т.е. выполняется равенство*

$$\langle \boldsymbol{x}(t), -\boldsymbol{\psi}(t) \rangle = c(Y(t), -\boldsymbol{\psi}(t)). \tag{9.13}$$

Кроме того, выполнено условие трансверсальности на множестве M_0 (9.8).

Доказательство. Решение $\boldsymbol{x}(t)$ уравнения (9.1) с допустимым управлением $\boldsymbol{u}(t)$ запишем в виде формулы Коши с начальными условиями в моменты времени t_0 и t_1 (см. формулы (6.7) и (6.9) из лекции 6):

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\boldsymbol{u}(s)ds; \tag{9.14}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{(t-t_1)A}\boldsymbol{x}(t_1) - \int\limits_{t}^{t_1} e^{(t-s)A}\boldsymbol{u}(s)ds. \tag{9.15}$$

Учитывая свойства экспоненциала (см. лекцию 6), из формул (9.10) и (9.14) получаем выражение

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t)\rangle &= \langle e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}(t_0), e^{(t-t_0)A^*}\boldsymbol{\psi}(t_0)\rangle + \\ &+ \int\limits_{t_0}^{t} \langle e^{(t-s)A}\boldsymbol{u}(s), e^{(t_0-t)A^*}\boldsymbol{\psi}(t_0)\rangle ds = \\ &= \langle \boldsymbol{x}(t_0), \boldsymbol{\psi}(t_0)\rangle + \int\limits_{t_0}^{t} \langle \boldsymbol{u}(s), e^{(t_0-s)A^*}\boldsymbol{\psi}(t_0)\rangle ds = \\ &= \langle \boldsymbol{x}(t_0), \boldsymbol{\psi}(t_0)\rangle + \int\limits_{t_0}^{t} \langle \boldsymbol{u}(s), \boldsymbol{\psi}(s)\rangle ds. \end{aligned} \tag{9.16}$$

Аналогично из формул (9.11) и (9.15) получаем выражение

$$\langle \boldsymbol{x}(t), -\boldsymbol{\psi}(t)\rangle = \langle \boldsymbol{x}(t_1), -\boldsymbol{\psi}(t_1)\rangle + \int\limits_{t}^{t_1} \langle \boldsymbol{u}(s), \boldsymbol{\psi}(s)\rangle ds. \tag{9.17}$$

В лекции 7 были получены опорные функции множеств достижимости $X(t)$ и управляемости $Y(t)$:

$$c(X(t), \boldsymbol{\psi}) = c\left(M_0, e^{(t-t_0)A^*}\boldsymbol{\psi}\right) + \int\limits_{t_0}^{t} c\left(U, e^{(t-s)A^*}\boldsymbol{\psi}\right) ds; \tag{9.18}$$

$$c(Y(t), \boldsymbol{\psi}) = c\left(M_1, e^{(t-t_1)A^*}\boldsymbol{\psi}\right) + \int\limits_{t}^{t_1} c\left(U, -e^{(t-s)A^*}\boldsymbol{\psi}\right) ds. \tag{9.19}$$

Подставляя в формулу (9.18) вместо вектора ψ при каждом $t \in I$ вектор $\psi(t)$, заданный формулой (9.10), получаем соотношение

$$c(X(t), \psi(t)) = c\left(M_0,\ e^{(t-t_0)A^*}e^{(t_0-t)A^*}\psi(t_0)\right) + \\ + \int_{t_0}^{t} c\left(U,\ e^{(t-s)A^*}e^{(t_0-t)A^*}\psi(t_0)\right) ds = \\ = c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t} c\left(U,\ e^{(t_0-s)A^*}\psi(t_0)\right) ds = \\ = c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t} c(U, \psi(s))ds. \quad (9.20)$$

Аналогично, подставляя в формулу (9.19) вектор $-\psi(t)$, заданный формулой (9.11), получаем соотношение

$$c(Y(t), -\psi(t)) = c(M_1, -\psi(t_1)) + \int_{t}^{t_1} c(U, \psi(s))ds. \quad (9.21)$$

Докажем теперь эквивалентность утверждений 1 — 3. Пусть пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет принципу максимума на отрезке времени $[t_0, t_1]$. Из условия максимума (9.7) и условия трансверсальности на множестве M_0 (9.8) следует, что правые части выражений (9.16) и (9.20) совпадают. Таким образом, выполняется равенство (9.12). Аналогично из формул (9.7) и (9.9) следует, что правые части выражений (9.17) и (9.21) совпадают. Таким образом, выполняется равенство (9.13). Следовательно, из утверждения 1 получаем 2 и 3.

Пусть выполнено утверждение 2. Из равенства (9.12) при $t = t_1$ получаем соотношение

$$c(X(t_1), \psi(t_1)) - \langle \boldsymbol{x}(t_1), \psi(t_1)\rangle = 0.$$

Используя формулы (9.20) и (9.16), преобразуем его к виду

$$[c(M_0, \psi(t_0)) - \langle \boldsymbol{x}(t_0), \psi(t_0)\rangle] + \int_{t_0}^{t_1} [c(U, \psi(s)) - \langle \boldsymbol{u}(s), \psi(s)\rangle] ds = 0. \quad (9.22)$$

Из включений $\boldsymbol{x}(t_0) \in M_0$ и $\boldsymbol{u}(t) \in U$ при всех $t \in I$ согласно свойствам опорных функций следует, что первое слагаемое в формуле (9.22) неотрицательно, подынтегральная функция также неотрицательна, значит, и интеграл неотрицателен. Таким образом, из равенства (9.22) получаем следующие равенства:

$$c(M_0, \boldsymbol{\psi}(t_0)) - \langle \boldsymbol{x}(t_0), \boldsymbol{\psi}(t_0)\rangle = 0,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} [c(U, \boldsymbol{\psi}(s)) - \langle \boldsymbol{u}(s), \boldsymbol{\psi}(s)\rangle] ds = 0.$$

Из первого равенства вытекает условие трансверсальности на множестве M_0 (9.8), а из второго, с учетом неотрицательности подынтегральной функции и свойства 6 интеграла Лебега (раздел Д6 дополнений) — условие максимума (9.7) при почти всех $t \in [t_0, t_1]$. Следовательно, из утверждения 2 получается утверждение 1.

Аналогично из утверждения 3 следует утверждение 1. Действительно, из равенства (9.13) при $t = t_0$ получаем соотношение

$$c(Y(t_0), -\boldsymbol{\psi}(t_0)) - \langle \boldsymbol{x}(t_0), -\boldsymbol{\psi}(t_0)\rangle = 0.$$

Используя формулы (9.21) и (9.17), преобразуем его к виду

$$[c(M_1, -\boldsymbol{\psi}(t_1)) - \langle \boldsymbol{x}(t_1), -\boldsymbol{\psi}(t_1)\rangle] + \\ + \int_{t_0}^{t_1} [c(U, \boldsymbol{\psi}(s)) - \langle \boldsymbol{u}(s), \boldsymbol{\psi}(s)\rangle] ds = 0. \quad (9.23)$$

Из включений $\boldsymbol{x}(t_1) \in M_1$ и $\boldsymbol{u}(t) \in U$ получаем, что оба слагаемые в формуле (9.23) неотрицательны, следовательно, равны нулю. Первое слагаемое дает условие трансверсальности на множестве M_1 (9.9), а второе — условие максимума (9.7) при почти всех $t \in I$.

Таким образом, лемма полностью доказана.

Замечание. Из приведенного доказательства видно, что в утверждении 2 достаточно потребовать, чтобы вектор $\boldsymbol{\psi}(t)$ был опорным к множеству достижимости $X(t)$ в точке $\boldsymbol{x}(t)$ лишь при $t = t_1$, т.е. чтобы равенство (9.12) выполнялось только в конечный момент времени $t = t_1$. Тогда выполняется утверждение 1 и, следовательно, равенство (9.12) выполняется при всех $t \in [t_0, t_1]$.

Доказанная выше лемма позволяет придать принципу максимума Понтрягина следующий геометрический смысл. Если пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет принципу максимума на отрезке времени $[t_0, t_1]$ с сопряженной функцией $\boldsymbol{\psi}(t)$, то в каждый момент времени $t \in [t_0, t_1]$ гиперплоскость

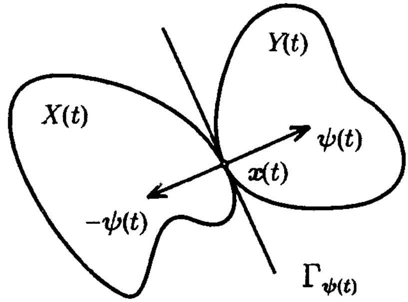


Рис. 39

$$\Gamma_{\boldsymbol{\psi}(t)} = \{\boldsymbol{x} \in E^n : \ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\psi}(t) \rangle = \langle \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle\},$$

проходящая через точку $\boldsymbol{x}(t)$ с вектором нормали $\boldsymbol{\psi}(t)$, разделяет множество достижимости $X(t)$ и множество управляемости $Y(t)$ (рис. 39).

9.3. Необходимые условия оптимальности

Рассмотрим, при каких предположениях принцип максимума Понтрягина является необходимым условием оптимальности.

Теорема о необходимых условиях оптимальности. *Пусть в задаче быстродействия множества M_0 и M_1 выпуклы. Пусть, далее, $\boldsymbol{u}(t)$ — оптимальное управление, переводящее объект из множества M_0 на множество M_1 на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, и $\boldsymbol{x}(t)$ — соответствующее решение уравнения* (9.1). *Тогда пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке времени I.*

Доказательство. Нужно доказать существование такого нетривиального решения сопряженной системы (9.6), что выполняются условия (9.7)—(9.9). Управление $\boldsymbol{u}(t)$ по предположению теоремы является оптимальным в задаче быстродействия и переводит объект из начального множества M_0 на конечное множество M_1 на отрезке времени $[t_0, t_1]$. Следовательно, множество достижимости $X(t)$ для любого момента времени $t < t_1$ удовлетворяет соотношениям

$$X(t_1) \cap M_1 \neq \emptyset, \qquad X(t) \cap M_1 = \emptyset. \tag{9.24}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t, \psi) = c(X(t), \psi) + c(M_1, -\psi) \tag{9.25}$$

и последовательность точек $t_k = t_1 - \frac{1}{k} < t_1$. Множества M_0 и M_1 выпуклы по предположению теоремы, и множество достижимости $X(t)$ выпукло согласно свойству 3 множеств достижимости (см. лекцию 7). В этом случае соотношения (9.24) можно в эквивалентном виде записать с помощью опорных функций. Используя следствие из свойства 12 опорных функций (см. лекцию 3), получим следующее утверждение: для любого вектора $\psi \in S$ выполняется неравенство

$$\varphi(t_1, \psi) = c(X(t_1), \psi) + c(M_1, -\psi) \geqslant 0 \tag{9.26}$$

и для любого $t_k < t_1$ существует вектор $\psi_k \in S$ такой, что справедливо строгое неравенство

$$\varphi(t_k, \psi_k) = c(X(t_k), \psi_k) + c(M_1, -\psi_k) < 0. \tag{9.27}$$

Векторы ψ_k принадлежат компактному множеству S, поэтому из последовательности $\{\psi_k\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому вектору $\overline{\psi} \in S$. Обозначим ее снова через $\{\psi_k\}$. Функция $\varphi(t, \psi)$ непрерывна по ψ как сумма двух непрерывных опорных функций (см. следствие из свойства 13 опорных функций, лекция 3). Более того, функция $\varphi(t, \psi)$ непрерывна по t, так как множество достижимости $X(t)$ непрерывно зависит от t (см. свойство 7 из лекции 7) и опорная функция $c(X(t), \psi)$ является непрерывной по t в силу следствия из свойства 13 опорных функций.

Таким образом, в неравенстве (9.27) можно перейти к пределу при $k \to \infty$. Поскольку $t_k \to t_1$ и $\psi_k \to \overline{\psi}$, в пределе получим неравенство

$$\varphi(t_1, \overline{\psi}) \leqslant 0.$$

Отсюда, учитывая неравенство (9.26), получаем равенство

$$\varphi(t_1, \overline{\psi}) = 0,$$

а по определению функции $\varphi(t, \psi)$ (см. формулу (9.25)) это означает, что для вектора $\psi \in S$ справедливо соотношение

$$c(X(t), \overline{\psi}) + c(M_1, -\overline{\psi}) = 0. \tag{9.28}$$

Поскольку точка $\boldsymbol{x}(t_1)$ принадлежит обоим множествам $X(t_1)$ и M_1, имеем следующие неравенства (см. следствие из свойства 6 опорных функций, лекция 3):

$$\langle \boldsymbol{x}(t_1), \overline{\boldsymbol{\psi}} \rangle \leqslant c(X(t_1), \overline{\boldsymbol{\psi}}),$$
$$\langle \boldsymbol{x}(t_1), -\overline{\boldsymbol{\psi}} \rangle \leqslant c(M_1, -\overline{\boldsymbol{\psi}}).$$

В действительности в этих неравенствах выполняется равенство, так как если хотя бы в одном из них есть строгое неравенство, то, складывая их, получим строгое неравенство

$$0 < c(X(t_1), \overline{\boldsymbol{\psi}}) + c(M_1, -\overline{\boldsymbol{\psi}}),$$

а это противоречит равенству (9.28). Таким образом, имеем два равенства:

$$\langle \boldsymbol{x}(t_1), \overline{\boldsymbol{\psi}} \rangle = c(X(t_1), \overline{\boldsymbol{\psi}}), \tag{9.29}$$
$$\langle \boldsymbol{x}(t_1), -\overline{\boldsymbol{\psi}} \rangle = c(M_1, -\overline{\boldsymbol{\psi}}). \tag{9.30}$$

Рассмотрим решение $\boldsymbol{\psi}(t)$ сопряженной системы дифференциальных уравнений (9.6) с начальным условием в точке t_1, а именно, $\boldsymbol{\psi}(t_1) = \overline{\boldsymbol{\psi}}$. Эта сопряженная функция задается формулой (9.11). Она невырожденна, так как $\overline{\boldsymbol{\psi}} \neq 0$ (вектор $\overline{\boldsymbol{\psi}}$ принадлежит единичной сфере S). Учитывая равенство $\boldsymbol{\psi}(t_1) = \overline{\boldsymbol{\psi}}$, из формулы (9.30) получаем условия трансверсальности на множестве M_1 (9.9), а из формулы (9.29) — равенство (9.12) при $t = t_1$. Таким образом, справедливо утверждение 2 леммы об эквивалентной формулировке принципа максимума Понтрягина (см. сделанное выше замечание). По лемме пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет принципу максимума на отрезке времени $[t_0, t_1]$ с сопряженной функцией $\boldsymbol{\psi}(t)$. Тем самым теорема доказана.

ЛЕКЦИЯ 10

- *Схема применения принципа максимума Понтрягина для решения линейной задачи быстродействия.*
- *Примеры.*

10.1. Применение необходимых условий оптимальности

Рассмотрим снова линейную задачу быстродействия. Она заключается в нахождении допустимого управления $\boldsymbol{u}(t) \in U$, переводящего объект, описываемый уравнением

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}, \tag{10.1}$$

из начального множества M_0 на конечное множество M_1 за наименьшее время. Допустимым управлением является произвольная измеримая функция $\boldsymbol{u}(t) \in U$, множества $M_0, M_1, U \in E^n$ предполагаются непустыми и компактными.

Для этой задачи в предыдущей лекции была доказана теорема о необходимых условиях оптимальности. Для случая, когда множества M_0 и M_1 выпуклы, эта теорема утверждает, что любая пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$, решающая задачу оптимального быстродействия на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, должна удовлетворять на этом отрезке времени принципу максимума Понтрягина. По определению пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет принципу максимума на отрезке $[t_0, t_1]$, если существует такое нетривиальное решение $\boldsymbol{\psi}(t)$ вспомогательной сопряженной системы

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -A^*\boldsymbol{\psi}, \tag{10.2}$$

что выполнены следующие три условия:

1) условие максимума

$$\langle \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle = c(U, \boldsymbol{\psi}(t)) \tag{10.3}$$

для почти всех $t \in I$;

2) условие трансверсальности на множестве M_0

$$\langle \boldsymbol{x}(t_0), \boldsymbol{\psi}(t_0)\rangle = c(M_0, \boldsymbol{\psi}(t_0)); \tag{10.4}$$

3) условие трансверсальности на множестве M_1

$$\langle \boldsymbol{x}(t_1), -\boldsymbol{\psi}(t_1)\rangle = c(M_1, -\boldsymbol{\psi}(t_1)). \tag{10.5}$$

Таким образом, для решения задачи быстродействия можно поступить следующим образом. Найти все управления, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина, а затем среди этого множества управлений каким-либо образом найти действительно оптимальное управление. Эффективность такого подхода определяется тем, как много управлений будет удовлетворять принципу максимума. Чем у́же множество таких управлений, тем проще выбрать из него действительно оптимальное управление. Оказывается, что принцип максимума Понтрягина в этом смысле является довольно эффективным средством решения линейных задач быстродействия.

Заметим, что если сопряженная функция $\boldsymbol{\psi}(t)$ является решением линейной системы уравнений (10.2) и удовлетворяет равенствам (10.3)—(10.5), то функция $\lambda\boldsymbol{\psi}$, где λ — произвольное неотрицательное число, также является решением системы (10.2) и удовлетворяет равенствам (10.3)—(10.5). Это следует из того факта, что система уравнений (10.2) линейна и однородна, а опорные функции в равенствах (10.3)–(10.5) положительно однородны (см. свойство 1 опорных функций из лекции 3). Таким образом, при отыскании сопряженных функций $\boldsymbol{\psi}(t)$, удовлетворяющих принципу максимума Понтрягина, можно нормировать эти функции в какой-нибудь момент времени, например при $t = t_0$, $\|\boldsymbol{\psi}(t_0)\| = 1$, и перебирать сопряженные функции $\boldsymbol{\psi}(t)$ с начальными условиями из единичной сферы, $\boldsymbol{\psi}(t_0) \in S$.

Рассмотрим, как построить все управления, удовлетворяющие принципу максимума. Для этого можно предложить следующую схему (рис. 40). Начальный момент времени t_0 в нашей задаче зафиксирован. Возьмем произвольный начальный вектор $\boldsymbol{\psi}(t_0)$ из единичной сферы $S \subset E^n$. Найдем решение $\boldsymbol{\psi}(t)$ сопряженной системы (10.2) с этим начальным значением $\boldsymbol{\psi}(t_0)$. В силу теоремы 1 (см. лекцию 6) это решение $\boldsymbol{\psi}(t)$ существует и единственно на любом отрезке времени $[t_0, t_1]$, $t_1 \geqslant t_0$. Факт единственности этого решения показан на схеме одинарной стрелкой. Далее, зная решение $\boldsymbol{\psi}(t)$ сопряженной системы,

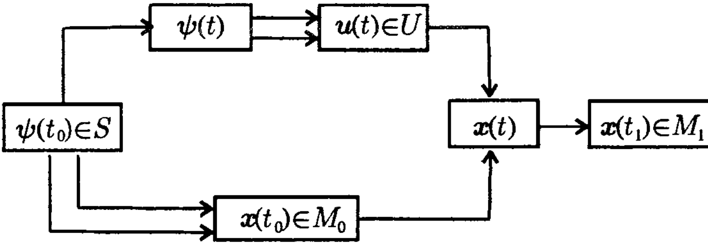


Рис. 40

найдем все допустимые управления $u(t) \in U$, удовлетворяющие условию максимума (10.3). Таких управлений $u(t)$ может быть несколько, и это указано на схеме двойной стрелкой. В дальнейшем (см. лекцию 12) исследуем, при каких условиях такое управление $u(t)$ определяется по функции $\psi(t)$ однозначным образом. По данному же начальному вектору $\psi(t_0)$ найдем все начальные значения вектора фазового состояния объекта $x(t_0)$ из начального множества M_0, удовлетворяющие условию трансверсальности на множестве M_0 (10.4). Таких начальных значений $x(t_0)$ опять может быть несколько. Этот факт также показан на схеме двойной стрелкой. В дальнейшем (см. лекцию 12) исследуем, при каких условиях вектор $x(t_0)$ определяется однозначным образом по вектору $\psi(t_0)$. Теперь, зная допустимое управление $u(t)$ и начальное состояние объекта $x(t_0)$, найдем решение уравнения (10.1). Это решение $x(t)$ в силу теоремы 1 (см. лекцию 6) находится однозначно по функции $u(t)$ и начальному условию $x(t_0)$. После того как построено решение $x(t)$, осталось только проверить, достигнет ли это решение при каком-либо $t_1 \geqslant t_0$ множества M_1 или нет, а если решение $x(t)$ достигнет в какой-то момент t_1 множества M_1, то выполняется ли условие трансверсальности на множестве M_1 (10.5). Если это условие выполнено, то пара $u(t), x(t)$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на полученном отрезке времени $[t_0, t_1]$; если это условие не выполнено, то пара $u(t), x(t)$ не удовлетворяет принципу максимума.

Заметим, что при таком подходе все пары $u(t), x(t)$, удовлетворяющие принципу максимума, зависят лишь от начального вектора $\psi(t_0) \in S$, причем эта зависимость на двух этапах может быть неоднозначной. В дальнейшем (см. лекцию 12) покажем, что при некоторых дополнительных условиях на задачу быстродействия эта зависимость однозначна. Заметим также, что если известно, что объект является управляемым из множества M_0 на множество M_1 на отрезке времени $[t_0, t_1]$, то решения $\boldsymbol{\psi}(t)$ и $\boldsymbol{x}(t)$ в данной схеме можно строить лишь на этом отрезке времени.

Проиллюстрируем данную схему решения задачи быстродействия на конкретных примерах.

Пример 1. Рассмотрим задачу под условным названием "Запуск ракеты с Земли на космическую станцию". Пусть ракета единичной массы движется прямолинейно в соответствии с законом движения

$$\ddot{x} = f(t),$$

где x — отклонение ракеты от какой-либо фиксированной точки, $\ddot{x}$ — ускорение ракеты, $f(t)$ — сила, действующая на ракету в момент времени t. Предполагается, что силу $f(t)$ можно изменять со временем в пределах возможностей двигателя ракеты, которые определяются условием $|f(t)| \leqslant 1$. В начальный момент времени $t_0 = 0$ ракета находится в состоянии $x(0) = -\frac{5}{2}$. При этом можно также придать ракете ограниченную начальную скорость $|\dot{x}(0)| \leqslant 1$. Требуется за наименьшее время перевести ракету в состояние $1 \leqslant x(t_1) \leqslant 2$, $\dot{x}(t_1) = 0$, т.е. с нулевой скоростью произвести стыковку с космической станцией, которая может подойти в любое из положений $1 \leqslant x \leqslant 2$ к заданному моменту времени.

Приведем данную задачу к стандартному виду. Для этого введем новые переменные $x^1 = x$, $x^2 = \dot{x}$, $u^1 = 0$, $u^2 = f$. Таким образом, фазовый вектор объекта является двумерным $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2)$, а уравнение движения имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = u^2. \end{cases} \tag{10.6}$$

Ограничение на управление $\boldsymbol{u} = (u^1, u^2)$ задается множеством

$$U = \{\boldsymbol{u} \in E^2 : \ u^1 = 0, \ |u^2| \leqslant 1\}.$$

Начальное множество M_0 имеет вид (рис. 41)

$$M_0 = \{\boldsymbol{x} \in E^2 : \ x^1 = -\frac{5}{2}, \ |x^2| \leqslant 1\},$$

а конечное множество M_1 — вид

$$M_1 = \{\boldsymbol{x} \in E^2 : \ 1 \leqslant x^1 \leqslant 2, \ x^2 = 0\}.$$

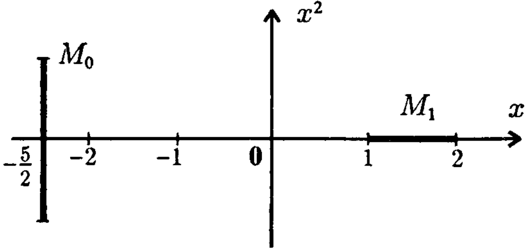


Рис. 41

Найдем все управления, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина, для чего запишем все условия этого принципа применительно к данной задаче. Матрица A для уравнения (10.6) имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и сопряженная система уравнений (10.2) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}^1 = 0, \\ \dot{\psi}^2 = -\psi^1. \end{cases} \tag{10.7}$$

Опорные функции множеств U, M_0, M_1 вычисляются непосредственно:

$$c(U, \psi) = |\psi^2|, \;\; c(M_0, \psi) = -\frac{5}{2}\psi^1 + |\psi^2|, \;\; c(M_1, \psi) = \frac{3}{2}\psi^1 + \frac{1}{2}|\psi^1|.$$

Из условия максимума (10.3) получаем равенство

$$u^2(t)\psi^2(t) = |\psi^2(t)|,$$

следовательно, имеем соотношения

$$\begin{array}{rll} u^2(t) = +1, & \text{если} & \psi^2(t) > 0, \\ u^2(t) = -1, & \text{если} & \psi^2(t) < 0, \\ -1 \leqslant u^2(t) \leqslant 1, & \text{если} & \psi^2(t) = 0. \end{array} \tag{10.8}$$

Из условия трансверсальности на множестве M_0 (10.4) получаем равенство

$$-\frac{5}{2}\psi^1(0) + x^2(0)\psi^2(0) = -\frac{5}{2}\psi^1(0) + |\psi^2(0)|,$$

следовательно, справедливы соотношения

$$
\begin{aligned}
x^2(t_0) &= +1, \quad \text{если} \quad \psi^2(0) > 0, \\
x^2(t_0) &= -1, \quad \text{если} \quad \psi^2(0) < 0, \\
-1 \leqslant x^2(t_0) &\leqslant +1, \quad \text{если} \quad \psi^2(0) = 0.
\end{aligned}
\tag{10.9}
$$

И наконец, из условия трансверсальности на множестве M_1 (10.5) получаем равенство

$$
x^1(t_1)(-\psi^1(t_1)) = -\frac{3}{2}\psi^1(t_1) + \frac{1}{2}|\psi^1(t_1)|,
$$

следовательно, выполняются соотношения

$$
\begin{aligned}
x^1(t_1) &= 1, \quad \text{если} \quad \psi^1(t_1) > 0, \\
x^1(t_1) &= 2, \quad \text{если} \quad \psi^1(t_1) < 0, \\
1 \leqslant x^1(t_1) &\leqslant 2, \quad \text{если} \quad \psi^1(t_1) = 0.
\end{aligned}
\tag{10.10}
$$

Рассмотрим решение сопряженной системы (10.7) с начальным условием $\boldsymbol{\psi}(0) = (\psi^1(0), \psi^2(0)) \in S$. Это решение имеет вид

$$
\psi^1(t) \equiv \psi^1(0), \qquad \psi^2(t) = -\psi^1(0)t + \psi^2(0).
$$

Из условия максимума (10.8) следует, что управление $u^2(t)$, удовлетворяющее принципу максимума, зависит от знака функции $\psi^2(t)$ (рис. 42). Для тех моментов времени t, для которых $\psi^2(t) > 0$, управление имеет вид $u^2(t) = +1$. Для тех моментов времени t, для которых $\psi^2(t) < 0$, управление имеет вид $u^2(t) = -1$. Если в какой-то момент времени θ функция $\psi^2(t)$ обращается в нуль, то в этот момент времени управление $u^2(\theta)$ из условия максимума не определяется. Оно может принимать произвольное значение $-1 \leqslant u^2(\theta) \leqslant +1$. Функция $\psi^2(t)$ линейно зависит от времени t и не может тождественно обращаться в нуль, поскольку $\|\boldsymbol{\psi}(0)\| = 1$. Таким образом, функция $\psi^2(t)$ может обращаться в нуль не более чем в одной точке. Следовательно, управление $u^2(t)$, удовлетворяющее условию максимума (10.8), является кусочно постоянным, принимающим лишь два значения $+1$ и -1, причем оно может

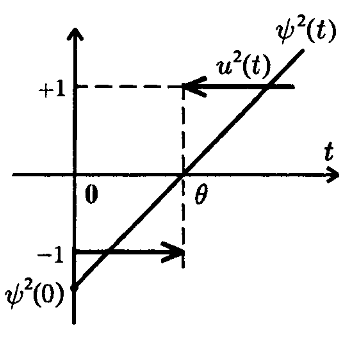


Рис. 42

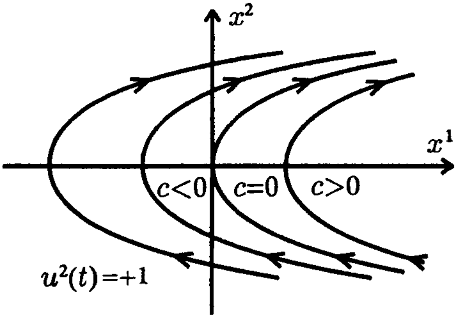


Рис. 43

менять свое значение не более одного раза именно в тот момент времени θ, когда $\psi^2(\theta) = 0$ (см. рис. 42). Произвол в выборе управления $u^2(t)$ в одной точке $t = \theta$ никак не сказывается на решении $x(t)$ системы уравнений (10.6).

Выясним, по какой траектории в фазовой плоскости $x = (x^1, x^2)$ будет двигаться точка $x(t)$ в случае, когда $u^2(t) = +1$. В силу уравнения (10.6) в этом случае имеем соотношения

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = 1. \end{cases} \tag{10.11}$$

Разделив первое уравнение на второе и проинтегрировав, получаем $x^1 = \frac{1}{2}(x^2)^2 + c$, где c — постоянная интегрирования, определяемая начальной точкой траектории. Такие фазовые траектории изображены на рис. 43. Они представляют собой семейство парабол, направление движения по которым указано стрелками. Такое направление объясняется тем, что $\dot{x}^2 = 1$, т.е. координата $x^2(t)$ возрастает с течением времени.

Аналогично строят фазовые траектории для случая, когда $u^2(t) = -1$. Они задаются уравнением $x^1 = -\frac{1}{2}(x^2)^2 + c$. Это семейство парабол изображено на рис. 44.

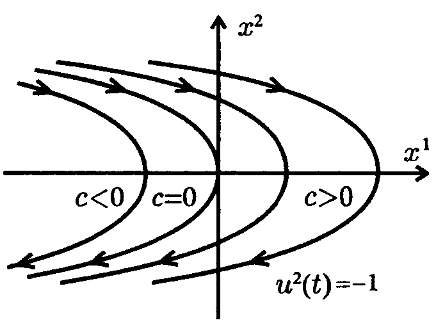


Рис. 44

Таким образом, в моменты времени t, когда $u^2(t) = +1$, движение фазовой точки $x(t)$ происходит по траекториям, изображенным на рис. 43, а в моменты времени t, когда $u^2(t) = -1$, — по траекториям, изображенным на рис. 44.

Построим теперь по схеме, приведенной на рис. 40, все управления и траектории, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина. Для этого исследуем поведение линейной функции

$$\psi^2(t) = -\psi^1(0)t + \psi^2(0).$$

Будем выбирать всевозможные начальные значения $(\psi^1(0), \psi^2(0)) \in S$. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Если $\psi^2(0) < 0$, то из условия трансверсальности на множестве M_0 следует, что начальная точка траектории имеет вид $\boldsymbol{x}(0) = (-\frac{5}{2}, -1)$. Функция $\psi^2(t)$ в этом случае может быть отрицательной при всех $t \geqslant 0$, если $\psi^1(0) > 0$ (прямая I на рис. 45), либо, начиная с некоторого момента времени $\theta > 0$, стать положительной, если $\psi^1(0) < 0$ (прямая I$'$ на рис. 45). Следовательно, согласно условию максимума (10.8) управление $u^2(t)$ будет иметь вид $u^2(t) \equiv -1$, или, начиная с момента времени θ, переключается на $+1$. В любом случае фазовая траектория $\boldsymbol{x}(t)$, выходящая из точки $\boldsymbol{x}(0) = (-\frac{5}{2}, -1)$, при таком управлении никогда не достигнет множества M_1. Полученные траектории обозначены на рис. 46 римскими цифрами I и I$'$ соответственно.

Случай 2. Если $\psi^2(0) = 0$, то из соотношения (10.9) следует, что начальная точка $\boldsymbol{x}(0)$ может принимать произвольное значение из множества M_0. В этом случае $\psi^1(0) \neq 0$, поскольку $\boldsymbol{\psi}(0) \in S$, а функция $\psi^2(t)$ либо отрицательна при всех $t > 0$, если $\psi^1(0) > 0$ (прямая II на рис. 45), либо положительна при всех $t > 0$, если $\psi^1(0) < 0$ (прямая II$'$ на рис. 45). В силу условия (10.8) это означает, что управление $u^2(t)$ постоянно при всех $t > 0$ и равно -1, если $\psi^1(0) > 0$, и равно $+1$, если $\psi^1(0) < 0$. Все

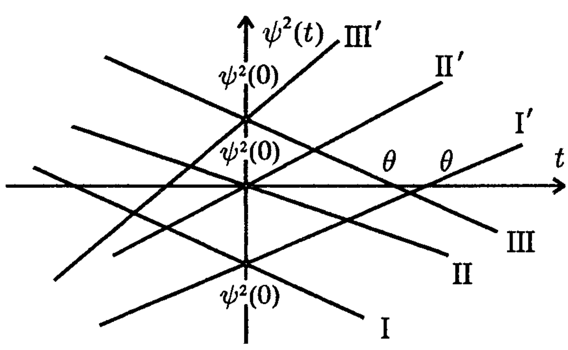


Рис. 45

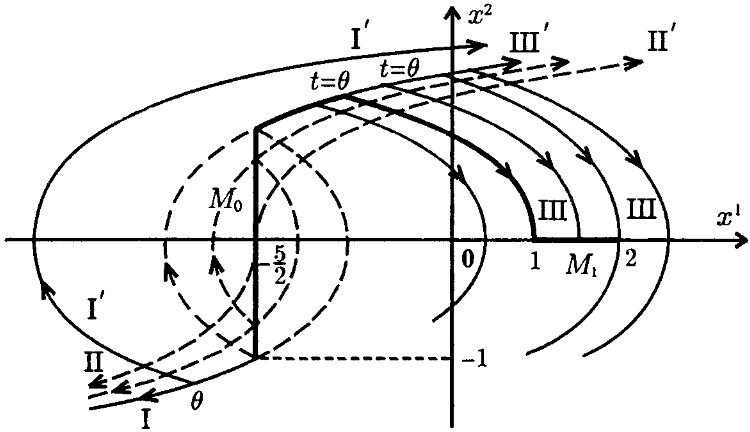


Рис. 46

траектории с такими постоянными управлениями изображены на рис. 46 штриховыми линиями и обозначены цифрами II и II′ соответственно. Ни одна из этих траекторий не достигает множества M_1.

Случай 3. Если $\psi^2(0) > 0$, то из условия трансверсальности на множестве M_0 следует, что начальная точка $\boldsymbol{x}(0)$ имеет вид $\boldsymbol{x}(0) = (-\frac{5}{2}, +1)$. Функция $\psi^2(t)$ в этом случае может быть положительной при всех $t \geqslant 0$, если $\psi^1(0) \leqslant 0$ (прямая III′ на рис. 45), либо, начиная с некоторого момента времени $\theta > 0$, стать отрицательной, если $\psi^1(0) > 0$ (прямая III на рис. 45). При этом момент θ может быть сделан произвольным, так как он определяется из условия $0 = -\psi^1(0)\theta + \psi^2(0)$. Следовательно, согласно условию максимума (10.8) управление $u^2(t)$ имеет вид $u^2(t) \equiv +1$, или, начиная с момента времени θ переключится на -1. Если $u^2(t) \equiv +1$, то траектория $\boldsymbol{x}(t)$ с начальным условием $\boldsymbol{x}(0) = (-\frac{5}{2}, +1)$ никогда не достигнет множества M_1. Такая траектория также изображена на рис. 46 и обозначена цифрой III′. Если управление $u^2(t)$ вначале равно $+1$, а затем -1, то при некоторых θ траектории такого вида достигнут множества M_1. Эти траектории обозначены на рис. 46 цифрой III. Из рис. 46 видно, что таких траекторий много и в каждую точку множества M_1 попадет одна траектория данного вида. Проверим условие трансверсальности на множестве M_1 (10.10). Поскольку для всех траекторий данного вида $\psi^1(0) > 0$, из соотношения (10.10) следует, что конечная точка траектории $\boldsymbol{x}(t)$ определяется условием $x^1(t_1) = 1$. Этому конечному условию удовлетворяет лишь одна траектория данного типа. На рис. 46 она изображена жирной линией.

Найдем эту единственную траекторию, удовлетворяющую принципу максимума. Точка $\boldsymbol{x}(\theta)$ лежит на пересечении параболы типа I, проходящей через точку $(-\frac{5}{2}, +1)$, и параболы типа II, проходящей через точку $(1, 0)$. Найдем ее, исходя из этого условия. Парабола I задается уравнением $x^1 = \frac{1}{2}(x^2)^2 - 3$, а парабола II — уравнением $x^1 = -\frac{5}{2}(x^2)^2 + 1$. Точка их пересечения $\boldsymbol{x}(\theta) = (-1, 2)$. Движение начинается из точки $\boldsymbol{x}(0) = (-\frac{5}{2}, +1)$ с управлением $u^2(t) = +1$. Из уравнения (10.11) найдем траекторию $\boldsymbol{x}(t)$ с начальным условием $\boldsymbol{x}(0) = (-\frac{5}{2}, 1)$. Имеем решение

$$x^1(t) = \frac{1}{2}(t+1)^2 - 3, \qquad x^2(t) = t + 1.$$

По такой траектории будет двигаться точка до момента времени θ, который определяется из условия попадания траектории $\boldsymbol{x}(t)$ в точку $(-1, 2)$. Имеем $2 = \theta + 1$, откуда $\theta = 1$. Начиная с этого момента времени управление $u^2(t)$ равно -1. Дальнейшую траекторию найдем, решая уравнение (10.6) при $u^2(t) = -1$ с начальным условием $\boldsymbol{x}(\theta) = (-1, 2)$. Имеем соответственно решение

$$x^1(t) = -\frac{(t-3)^2}{2} + 1, \qquad x^2(t) = -(t-3).$$

Момент времени t_1 определяется из условия попадания траектории в конечную точку $(1, 0)$. Получаем $t_1 = 3$.

Итак, мы установили, что единственное управление $\boldsymbol{u}(t)$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина и переводит ракету из множества M_0 на множество M_1 на отрезке времени $I = [0, 3]$. По теореме существования оптимального управления в данной задаче оптимальное управление существует. По теореме о необходимых условиях оптимальности это управление должно удовлетворять принципу максимума. А так как мы нашли единственное управление $\boldsymbol{u}(t)$, удовлетворяющее принципу максимума, то, следовательно, это управление $\boldsymbol{u}(t)$ оптимально.

Пример 2. Найдем оптимальное управление, переводящее объект, описываемый системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = u^2, \quad |u^2| \leqslant 1, \end{cases} \tag{10.12}$$

из начального множества $M_0 = \{(-\frac{1}{2}, 1)\}$ на конечное множество $M_1 = \{(\frac{1}{2}, 1)\}$ за наименьшее время.

Этот пример отличается от предыдущего только начальным и конечным множествами. Поэтому сопряженная система уравнений имеет вид (10.7), а условие максимума задается соотношениями (10.8). Для управления $u^2(t)$, удовлетворяющего условию максимума (10.8), возможны лишь четыре случая: управление $u^2(t)$ постоянно при всех $t \geqslant 0$ и принимает значение $+1$ или -1; управление $u^2(t)$ переключается с $+1$ на -1 или с -1 на $+1$ в некоторый момент времени $\theta > 0$ (см. рис. 42 и 45). Когда $u^2(t) = +1$, движение происходит по параболам, изображенным на рис. 43, а когда $u^2(t) = -1$, движение фазовой точки происходит по параболам, изображенным на рис. 44.

Множества M_0 и M_1 в данном примере состоят из одной точки, следовательно, условия трансверсальности (10.4) и (10.5) выполняются автоматически с любой сопряженной функцией $\psi(t)$. Таким образом, принцип максимума сводится к тому, что управление $u^2(t)$ имеет один из четырех описанных выше видов.

Найдем все управления, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина, используя схему, изображенную на рис. 40. Если управление $u^2(t)$ не имеет переключения, а равно $+1$ или -1 при всех $t \geqslant 0$, то такие траектории $\boldsymbol{x}(t)$, начинающиеся на множестве M_0, не попадают на множество M_1. Они обозначены на Рис. 47 цифрами I и II, соответственно. Если управление $u^2(t)$ переключается с $+1$ на -1 в некоторый момент времени θ, то одна из таких траекторий достигнет множества M_1. Эти траектории обозначены на рис. 47 цифрой III. Если управление переключается с -1 на $+1$ в некоторый момент времени θ, то также одна из таких траекторий достигает конечного множества M_1. Эти траектории обозначены на рис. 47 цифрой IV.

Таким образом, принципу максимума Понтрягина удовлетворяют два различных управления. Зная фазовые траектории, т.е. параболы, изображенные на рис. 47, и используя систему уравнений (10.12), уже нетрудно найти два эти управления и

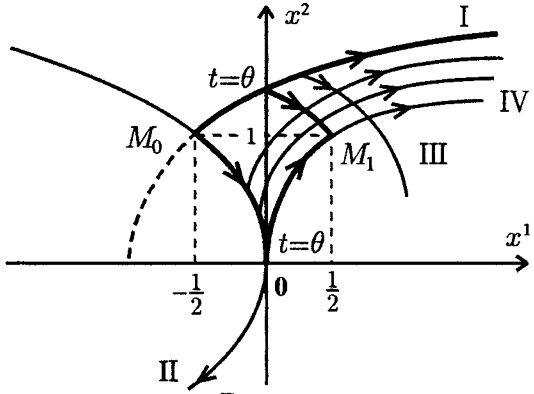


Рис. 47

соответствующие решения $\boldsymbol{x}(t)$. Вычислим их таким же способом, как и в примере 1.

Первое управление имеет вид

$$u^2(t) = \begin{cases} +1, & \text{если } \ 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{2}-1, \\ -1, & \text{если } \ \sqrt{2}-1 < t \leqslant 2\sqrt{2}-2, \end{cases}$$

и соответствующее решение

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2},\ t+1\right), & \text{если } \ 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{2}-1, \\ \left(-\frac{1}{2}t^2 + (2\sqrt{2}-1)t + 2\sqrt{2} - 3\frac{1}{2},\ -t + 2\sqrt{2} - 1\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } \ \sqrt{2}-1 < t \leqslant 2\sqrt{2}-2 \end{cases}$$

осуществляет переход из начального множества $M_0 = \{(-\frac{1}{2}, 1)\}$ на конечное множество $M_1 = \{(\frac{1}{2}, 1)\}$ на отрезке времени $[0, 2\sqrt{2}-2]$.

Второе управление имеет вид

$$u^2(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ +1, & \text{если } \ 1 < t \leqslant 2, \end{cases}$$

и соответствующее решение

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{cases} (-\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2},\ -t+1), & \text{если } \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ (\frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2},\ t-1), & \text{если } \ 1 < t \leqslant 2 \end{cases}$$

осуществляет переход из M_0 на M_1 на отрезке времени $[0, 2]$.

Сравнивая время перехода из M_0 на M_1 при этих управлениях $0,82 \approx 2\sqrt{2} - 2 < 2$, получаем, что первое управление оптимально, а второе — нет.

В примере 2 мы столкнулись с ситуацией, когда принципу максимума Понтрягина удовлетворяет несколько пар $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$. Это указывает на необходимость получения достаточных условий оптимальности, с помощью которых можно было бы из всех управлений, удовлетворяющих принципу максимума, выбрать действительно оптимальное управление. Такие достаточные условия оптимальности будут выведены в следующей лекции.

Рассмотрим еще один пример, поясняющий геометрический смысл принципа максимума, вытекающий из леммы об эквивалентной формулировке принципа максимума Понтрягина (см. лекцию 9).

Пример 3. Найдем оптимальное управление, переводящее объект, описываемый системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 + u^1, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2 \end{cases} \tag{10.13}$$

с ограничением на управление $\boldsymbol{u} \in U = S_1(\mathbf{0})$, из начального множества $M_0 = \{\mathbf{0}\}$ на конечное множество

$$M_1 = \{\boldsymbol{x} \in E^2 : \; x^1 = 2\pi, \; |x^2| \leqslant 1\} \tag{10.14}$$

за наименьшее время.

Для решения этой задачи применим принцип максимума. Сопряженная система уравнений (10.2) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}^1 = \psi^2, \\ \dot{\psi}^2 = -\psi^1. \end{cases}$$

Пусть $t_0 = 0$. Найдем решение $\boldsymbol{\psi}(t)$ этой системы с произвольным начальным условием

$$\boldsymbol{\psi}(0) = (\cos\alpha, \sin\alpha) \in S. \tag{10.15}$$

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ экспоненциал e^{tA} имеет вид

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \tag{10.16}$$

(см. пример 2 из лекции 6). Таким образом, решение $\boldsymbol{\psi}(t)$ задается соотношением (см. формулу (9.10) из лекции 9)

$$\boldsymbol{\psi}(t) = e^{-tA^*}\boldsymbol{\psi}(0) = e^{tA}\boldsymbol{\psi}(0) = \\ = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha - t) \\ \sin(\alpha - t) \end{pmatrix}. \quad (10.17)$$

Условие максимума (10.3) приобретает вид

$$\langle \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t)\rangle = c(U, \boldsymbol{\psi}(t)) = \|\boldsymbol{\psi}(t)\|.$$

Поскольку $\|\boldsymbol{\psi}(t)\| = 1$, из этого условия однозначно определяется управление

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{\psi}(t) = (\cos(\alpha - t),\ \sin(\alpha - t)). \quad (10.18)$$

Условие трансверсальности на множестве M_0 (10.4) выполняется автоматически, так как множество M_0 состоит из одной точки $\boldsymbol{x}_0 = 0$, а условие трансверсальности на множестве M_1 (10.5) в силу формулы (10.14) имеет вид

$$-x^1(t_1)\psi^1(t_1) - x^2(t_1)\psi^2(t_1) = -2\pi\psi^1(t_1) + |\psi^2(t_1)|.$$

Следовательно, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} x^2(t_1) &= +1, \quad \text{если} \quad \psi^2(t_1) < 0, \\ x^2(t_1) &= -1, \quad \text{если} \quad \psi^2(t_1) > 0, \\ -1 \leqslant x^2(t_1) &\leqslant 1, \quad \text{если} \quad \psi^2(t_1) = 0. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Найдем все пары $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина, в соответствии со схемой, приведенной на рис. 40.

Для этого найдем решения системы уравнений (10.13) с управлениями $\boldsymbol{u}(t)$, заданными формулой (10.18), и начальным условием $\boldsymbol{x}(0) = \mathbf{0}$. Запишем решение $\boldsymbol{x}(t)$ по формуле Коши (см. лекцию 6)

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\boldsymbol{u}(s)ds.$$

Подставляя в эту формулу конкретные значения и учитывая выражение (10.16), получаем решение

$$\boldsymbol{x}(t) = (t\cos(\alpha - t),\ t\sin(\alpha - t)). \quad (10.20)$$

Таким образом, выражение (10.20) дает все решения, удовлетворяющие условию максимума (10.3) и условию трансверсаль-

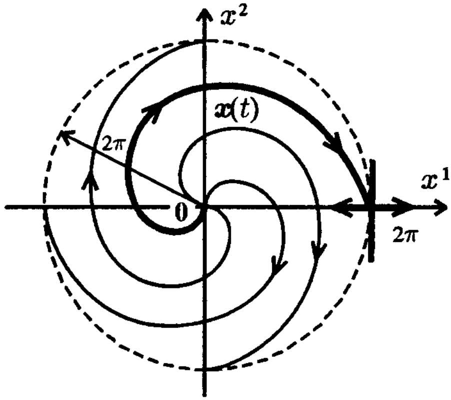


Рис. 48

ности на множестве M_0. При этом решения $\boldsymbol{x}(t)$ зависят от начального вектора $\boldsymbol{\psi}(0)$ сопряженной функции $\boldsymbol{\psi}(t)$ (см. формулу (10.15)).

Траектории $\boldsymbol{x}(t)$, заданные выражением (10.20), образуют в фазовой плоскости $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2)$ семейство спиралей (рис. 48). Поскольку $\|\boldsymbol{x}(t)\| = t$, в момент времени t все решения $\boldsymbol{x}(t)$ находятся на окружности радиуса t с центром в точке $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Понятно, что эти решения впервые достигнут множества M_1 в момент времени $t_1 = 2\pi$. Это будет траектория $\boldsymbol{x}(t)$, изображенная на рис. 48 жирной линией, она соответствует значению параметра $\alpha = 0$, т.е.

$$\boldsymbol{x}(t) = (t\cos t,\ -t\sin t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Остается только проверить условие трансверсальности на множестве M_1 (10.19). Поскольку при $\alpha = 0$ из формулы (10.17) получаем сопряженную функцию

$$\boldsymbol{\psi}(t) = (\cos t, -\sin t), \tag{10.21}$$

то $\psi^2(2\pi) = 0$, и соотношение (10.19) выполняется.

Таким образом, единственная пара

$$\boldsymbol{u}(t) = (\cos t, -\sin t), \qquad \boldsymbol{x}(t) = (t\cos t, -t\sin t)$$

осуществляет переход из множества M_0 на множество M_1 на отрезке времени $[0, 2\pi]$ и удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Следовательно, эта пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$ оптимальна.

Продемонстрируем на этом примере геометрический смысл принципа максимума. Для этого вычислим множество достижимости $X(t)$ и множество управляемости $Y(t)$. Они задаются формулами (см. лекцию 7)

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}M_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}U\,ds,$$

$$Y(t) = e^{(t-t_1)A}M_1 + \int_{t}^{t_1} e^{(t-s)A}[-U]\,ds.$$

Подставляя в эти формулы конкретные значения и учитывая, что матрица (10.16) осуществляет поворот на угол t по часовой стрелке, получим выражения

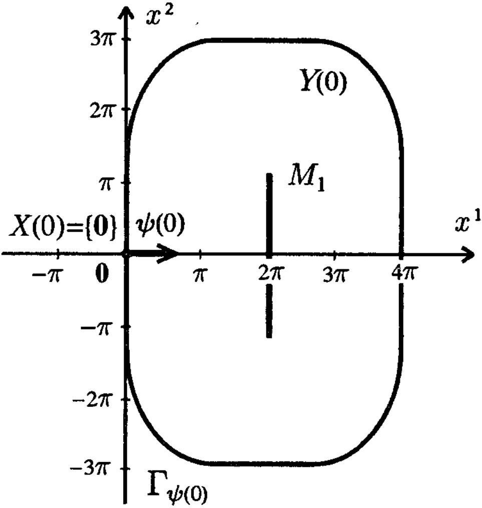
$$X(t) = S_t(\mathbf{0}), \qquad Y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} M_1 + S_{2\pi-t}(\mathbf{0}).$$

Таким образом, множество достижимости $X(t)$ есть круг радиуса t с центром в начале координат, а множество управляемости $Y(t)$ — сумма отрезка M_1, повернутого на угол t по часовой стрелке, и круга радиуса $2\pi - t$ с центром в начале координат.

На рис. 49 – 53 показано в динамике изменение множеств достижимости $X(t)$ и управляемости $Y(t)$. При этом видно, что для всех моментов времени $t \in [0, 2\pi]$ сопряженный вектор $\psi(t)$, задаваемый формулой (10.21), является опорным вектором к множеству достижимости $X(t)$ в точке $x(t)$. Аналогично вектор $-\psi(t)$ является опорным вектором к множеству управляемости $Y(t)$ в точке $x(t)$. Гиперплоскость

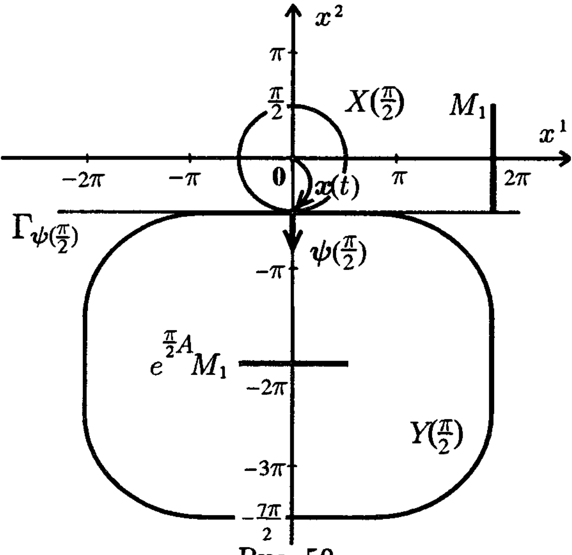
$$\Gamma_{\psi(t)} = \{x \in E^n : \langle x - x(t), \psi(t) \rangle = 0\}$$

разделяет множества $X(t)$ и $Y(t)$. Таков геометрический смысл принципа максимума Понтрягина.



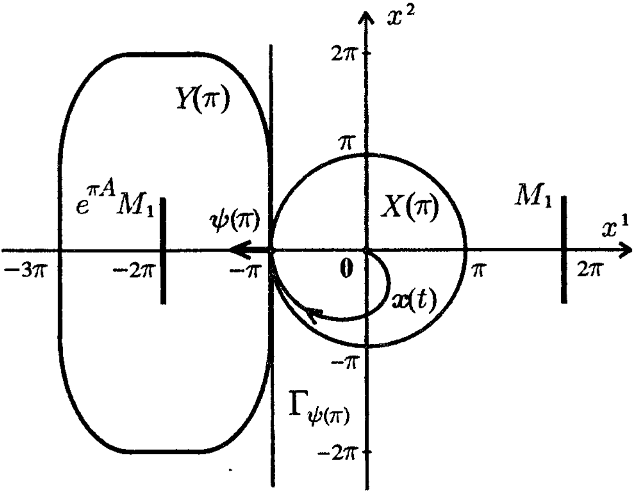
x^2
3π
$Y(0)$
2π
π
M_1
$X(0)=\{0\}$
$\psi(0)$
x^1
$-\pi$
0
π
2π
3π
4π
$-\pi$
-2π
-3π
$\Gamma_{\psi(0)}$

Рис. 49



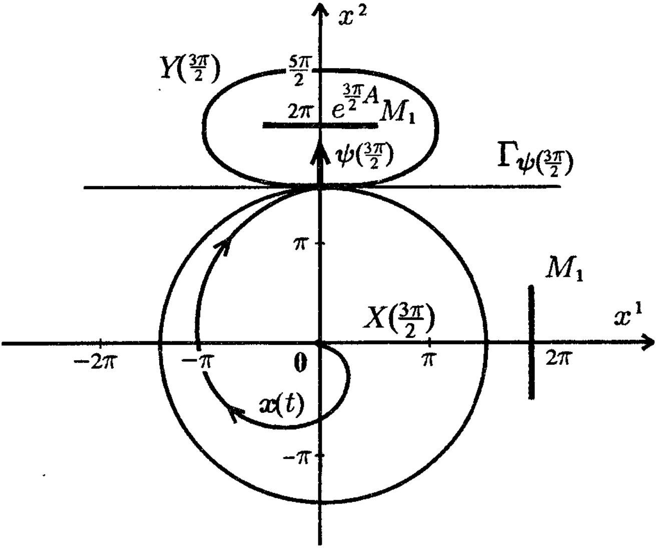
x^2
π
$\frac{\pi}{2}$
$X(\frac{\pi}{2})$
M_1
x^1
-2π
$-\pi$
0
$x(t)$
π
2π
$\Gamma_{\psi(\frac{\pi}{2})}$
$\psi(\frac{\pi}{2})$
$-\pi$
$e^{\frac{\pi}{2}A}M_1$
-2π
$Y(\frac{\pi}{2})$
-3π
$-\frac{7\pi}{2}$

Рис. 50



x^2
2π
$Y(\pi)$
π
$e^{\pi A}M_1$
$X(\pi)$
M_1
$\psi(\pi)$
x^1
-3π
-2π
$-\pi$
0
π
2π
$x(t)$
$-\pi$
$\Gamma_{\psi(\pi)}$
-2π

Рис. 51



x^2
$Y(\frac{3\pi}{2})$
$\frac{5\pi}{2}$
2π
$e^{\frac{3\pi}{2}A}M_1$
$\psi(\frac{3\pi}{2})$
$\Gamma_{\psi(\frac{3\pi}{2})}$
π
M_1
$X(\frac{3\pi}{2})$
x^1
-2π
$-\pi$
0
π
2π
$x(t)$
$-\pi$

Рис. 52

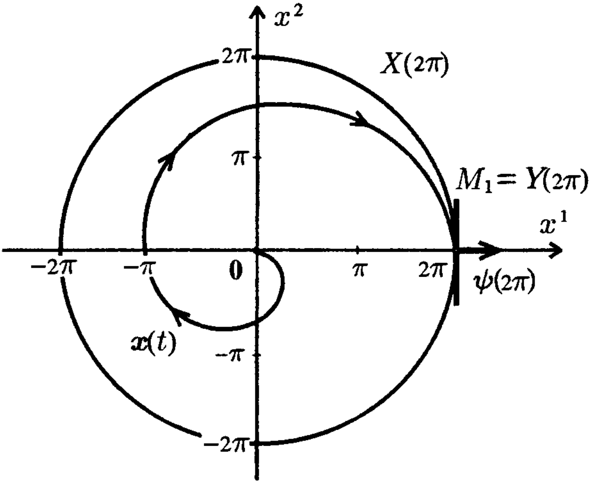


Рис. 53

10.2. Задачи

1. Найдите оптимальное управление, переводящее объект, описываемый системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = v, \quad |v| \leqslant 1, \end{cases} \tag{10.22}$$

из начального множества

$$M_0 = \{\boldsymbol{x} \in E^2 :\ -5 \leqslant x^1 \leqslant -4,\ x^2 = 0\}$$

на конечное множество $M_1 = \{\mathbf{0}\}$ за наименьшее время.

2. Найдите оптимальное управление, переводящее объект, описываемый системой уравнений (10.22) из начального множества $M_0 = \{\mathbf{0}\}$ на конечное множество

$$M_1 = \{\boldsymbol{x} \in E^2 :\ x^1 = 5,\ |x^2| \leqslant 2\}$$

за наименьшее время.

ЛЕКЦИЯ 11

- *Усиленные условия трансверсальности на множествах M_0 и M_1.*
- *Теорема о достаточных условиях оптимальности.*

11.1. Достаточные условия оптимальности

Займемся теперь достаточными условиями оптимальности в линейной задаче быстродействия, которая заключается в нахождении допустимого управления $\boldsymbol{u}(t) \in U$, переводящего объект, описываемый уравнением

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}, \tag{11.1}$$

из начального множества M_0 на конечное множество M_1 за наименьшее время. Достаточные условия оптимальности будут даны также в форме принципа максимума Понтрягина. По определению пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет принципу максимума на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, если существует решение $\boldsymbol{\psi}(t)$ вспомогательной сопряженной системы

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -A^*\boldsymbol{\psi} \tag{11.2}$$

с начальным условием $\boldsymbol{\psi}(t_0) \in S$ такое, что выполнены следующие три условия:

1) условие максимума

$$\langle \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle = c(U, \boldsymbol{\psi}(t)) \tag{11.3}$$

для почти всех $t \in I$;

2) условие трансверсальности на множестве M_0

$$\langle \boldsymbol{x}(t_0), \boldsymbol{\psi}(t_0) \rangle = \mathrm{c}(M_0, \boldsymbol{\psi}(t_0)); \tag{11.4}$$

3) условие трансверсальности на множестве M_1

$$\langle \boldsymbol{x}(t_1), -\boldsymbol{\psi}(t_1) \rangle = c(M_1, -\boldsymbol{\psi}(t_1)). \tag{11.5}$$

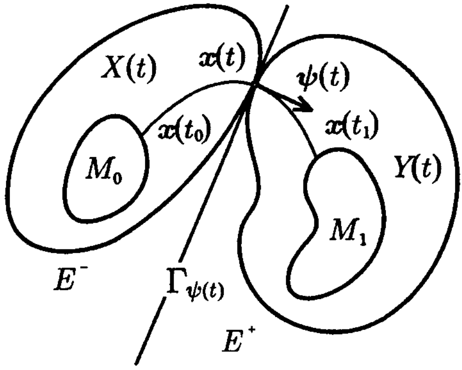


Рис. 54

Оказывается, для того чтобы пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$, удовлетворяющая принципу максимума Понтрягина на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, была оптимальной, достаточно, чтобы она удовлетворяла еще одному из двух дополнительных условий. Эти условия называются усиленными условиями трансверсальности на множествах M_0 и M_1 соответственно.

Определение. *Пусть $\boldsymbol{x}(t)$ — траектория управляемой системы (11.1) на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$. Пусть далее $\boldsymbol{\psi}(t)$ — некоторое решение сопряженной системы (11.2). Будем говорить, что решение $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет усиленному условию трансверсальности на множестве M_0 с функцией $\boldsymbol{\psi}(t)$ на отрезке времени I, если для всех моментов времени $t_0 < t \leqslant t_1$ выполняется строгое неравенство*

$$\langle \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle > c(M_0, \boldsymbol{\psi}(t)). \tag{11.6}$$

Далее, решение $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет усиленному условию трансверсальности на множестве M_1 с функцией $\boldsymbol{\psi}(t)$ на отрезке времени I, если для всех моментов времени $t_0 \leqslant t < t_1$ выполняется строгое неравенство

$$\langle \boldsymbol{x}(t), -\boldsymbol{\psi}(t) \rangle > c(M_1, -\boldsymbol{\psi}(t)). \tag{11.7}$$

Выясним геометрический смысл усиленных условий трансверсальности. Проведем через точку $\boldsymbol{x}(t)$ гиперплоскость $\Gamma_{\boldsymbol{\psi}(t)}$ с вектором нормали $\boldsymbol{\psi}(t)$ (рис. 54). Гиперплоскость $\Gamma_{\boldsymbol{\psi}(t)}$ разделяет все пространство E^n на два замкнутых полупространства: E^+ — положительное относительно вектора $\boldsymbol{\psi}(t)$ полупространство и E^- — отрицательное. Как мы уже знаем, эта гиперплоскость разделяет множества достижимости $X(t)$ и управляемости $Y(t)$ при всех $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, если пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет принципу максимума на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$ с сопряженной функцией $\boldsymbol{\psi}(t)$.

Таким образом, множество достижимости $X(t)$ принадлежит полупространству E^-, а множество управляемости — полупространству E^+. Усиленное условие трансверсальности на множестве M_0, т.е. неравенство (11.6), означает, что при всех $t \leqslant t_0 < t_1$ множество M_0 лежит строго внутри отрицательного полупространства E^-. Аналогичным образом усиленное условие трансверсальности на множестве M_1, т.е. неравенство (11.7), означает, что при всех $t \leqslant t_0 < t_1$ множество M_1 лежит строго внутри положительного полупространства E^+ (см. рис. 54).

Термин "усиленное условие трансверсальности" на множестве M_0 (11.6) подразумевает, что это условие сильнее обычного условия трансверсальности (11.4) на множестве M_0. В действительности так оно и есть, и из неравенства (11.6) следует неравенство (11.4). В самом деле, пусть неравенство (11.6) выполняется при всех $t_0 < t \leqslant t_1$. Поскольку в неравенстве (11.6) слева и справа стоят непрерывные функции (см. следствие свойства 13 опорных функций, лекция 3), то, переходя к пределу при $t \to t_0$, получим неравенство

$$\langle \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t_0) \rangle \geqslant c(M_0, \boldsymbol{\psi}(t_0)).$$

Так как $\boldsymbol{x}(t_0) \in M_0$, то по свойствам опорных функций имеем неравенство

$$\langle \boldsymbol{x}(t_0), \boldsymbol{\psi}(t_0) \rangle \leqslant c(M_0, \boldsymbol{\psi}(t_0)).$$

Из этих двух неравенств следует равенство (11.4).

Аналогичным образом из усиленного условия трансверсальности на множестве M_1 (11.7) следует обычное условие трансверсальности на множестве M_1 (11.5).

Первая теорема о достаточных условиях оптимальности. *Пусть $\boldsymbol{u}(t) \in U$ — некоторое допустимое управление, $\boldsymbol{x}(t)$ — соответствующее решение уравнения (11.1), переводящее объект из множества M_0 на множество M_1 на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$. Предположим, что пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке времени I, а $\boldsymbol{\psi}(t)$ — соответствующая сопряженная функция. Далее, предположим, что решение $\boldsymbol{x}(t)$ с этой функцией $\boldsymbol{\psi}(t)$ удовлетворяет на отрезке времени I одному из усиленных условий трансверсальности: либо на множестве M_0 (11.6), либо на множестве M_1 (11.7). Тогда управление $\boldsymbol{u}(t)$ оптимально.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{v}(t) \in U$ — произвольное допустимое управление на отрезке времени

$$I' = [t_0', t_1'] \subset [t_0, t_1] = I,$$

а $\boldsymbol{y}(t)$ — соответствующее решение уравнения (11.1). Рассмотрим скалярную функцию

$$\xi(t) = \langle \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle. \tag{11.8}$$

Покажем, что для почти всех $t \in I'$ выполняется неравенство

$$\dot{\xi}(t) \leqslant 0. \tag{11.9}$$

Действительно, так как функции $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$ являются решениями уравнения (11.1) с управлениями $\boldsymbol{u}(t)$ и $\boldsymbol{v}(t)$ соответственно, а $\boldsymbol{\psi}(t)$ — решение уравнения (11.2), то для почти всех $t \in I'$ имеем соотношения

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= \langle \dot{\boldsymbol{y}}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle - \langle \dot{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle + \langle \boldsymbol{y}(t), \dot{\boldsymbol{\psi}}(t) \rangle - \langle \boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{\psi}}(t) \rangle = \\ &= \langle A\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle + \langle \boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle - \langle A\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle - \langle \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle + \\ &+ \langle \boldsymbol{y}(t), -A^*\boldsymbol{\psi}(t) \rangle - \langle \boldsymbol{x}(t), -A^*\boldsymbol{\psi}(t) \rangle = \langle \boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle - \langle \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle.\end{aligned}$$

Далее, так как управление $\boldsymbol{u}(t)$ удовлетворяет условию максимума (11.3) для почти всех $t \in I$, получаем равенство

$$\dot{\xi}(t) = \langle \boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle - \mathrm{c}(U(t), \boldsymbol{\psi}(t)).$$

Поскольку управление $\boldsymbol{v}(t)$ допустимо, т.е. $\boldsymbol{v}(t) \in U$, то согласно следствию из свойства 6 опорных функций имеем неравенство $\dot{\xi}(t) \leqslant 0$ для почти всех $t \in I'$. Таким образом, неравенство (11.9) доказано.

Теперь докажем, что управление $\boldsymbol{u}(t)$ оптимально на отрезке времени $[t_0, t_1]$ в смысле быстродействия. Предположим противное, т.е. пусть существует такое допустимое управление $\boldsymbol{v}(t)$, что соответствующее решение уравнения (11.1) осуществляет переход из множества M_0 на множество M_1 на отрезке времени $[t_0, t_1 - \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$. Таким образом, справедливы граничные условия

$$\boldsymbol{y}(t_0) \in M_0, \qquad \boldsymbol{y}(t_1 - \varepsilon) \in M_1. \tag{11.10}$$

Дальнейшее доказательство разобьем на два случая в зависимости от того, какое усиленное условие трансверсальности выполнено: на множестве M_0 (11.6) или на множестве M_1 (11.7).

1. Пусть выполнено усиленное условие трансверсальности на множестве M_1, т.е. неравенство (11.7) справедливо при всех $t_0 \leqslant t < t_1$.

По предположению $\boldsymbol{y}(t_0) \in M_0$. Следовательно, из условия трансверсальности на множестве M_0 (11.4) по свойствам опорных функций получаем для функции $\xi(t)$ (см. формулу (11.8)) неравенство

$$\xi(t_0) = \langle \boldsymbol{y}(t_0), \boldsymbol{\psi}(t_0)\rangle - \langle \boldsymbol{x}(t_0), \boldsymbol{\psi}(t_0)\rangle = \\ = \langle \boldsymbol{y}(t_0), \boldsymbol{\psi}(t_0)\rangle - c(M_0, \boldsymbol{\psi}(t_0)) \leqslant 0.$$

Отсюда с учетом неравенства (11.9) на отрезке времени $I' = [t_0, t_1 - \varepsilon]$ и свойств интеграла Лебега следует соотношение

$$\xi(t_1 - \varepsilon) = \xi(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_1-\varepsilon} \dot{\xi}(s)\, ds \leqslant 0. \qquad (11.11)$$

По предположению $\boldsymbol{y}(t_1 - \varepsilon) \in M_1$ и $\varepsilon > 0$. Следовательно, из усиленного условия трансверсальности на множестве M_1 (11.7) при $t = t_1 - \varepsilon < t_1$ по свойствам опорных функций следует соотношение

$$\langle \boldsymbol{y}(t_1-\varepsilon), -\boldsymbol{\psi}(t_1-\varepsilon)\rangle \leqslant \mathrm{c}(M_1, -\boldsymbol{\psi}(t_1-\varepsilon)) < \langle \boldsymbol{x}(t_1-\varepsilon), -\boldsymbol{\psi}(t_1-\varepsilon)\rangle.$$

Отсюда для функции $\xi(t)$ получаем строгое неравенство

$$\xi(t_1 - \varepsilon) = \langle \boldsymbol{y}(t_1 - \varepsilon), \boldsymbol{\psi}(t_1 - \varepsilon)\rangle - \langle \boldsymbol{x}(t_1 - \varepsilon), \boldsymbol{\psi}(t_1 - \varepsilon)\rangle > 0,$$

которое противоречит неравенству (11.11).

Полученное противоречие означает, что управление $\boldsymbol{u}(t)$ оптимально.

2. Пусть выполнено усиленное условие трансверсальности на множестве M_0, т.е. неравенство (11.6) справедливо при всех $t_0 < t \leqslant t_1$.

По предположению существует такое допустимое управление $\boldsymbol{v}(t) \in U$, что соответствующее решение $\boldsymbol{y}(t)$ уравнения (11.1) удовлетворяет граничным условиям (11.10). Рассмотрим пару функций

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{v}(t - \varepsilon), \qquad \widetilde{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{y}(t - \varepsilon),$$

полученных из пары $\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{y}(t)$ заменой времени t на $t-\varepsilon$. Эти функции определены теперь на отрезке времени $[t_0+\varepsilon, t_1]$. Очевидно, что управление $\boldsymbol{v}(t)$ будет допустимым на отрезке времени $[t_0+\varepsilon, t_1]$. При сдвиге времени оно останется измеримым и будет удовлетворять включению

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{v}(t-\varepsilon) \in U.$$

Функция $\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)$ является решением системы уравнений (11.1) с управлением $\widetilde{\boldsymbol{v}}(t)$, так как при почти всех $t \in [t_0+\varepsilon, t_1]$ выполняются равенства

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{y}}}(t) = \frac{d\boldsymbol{y}(t-\varepsilon)}{dt} = A\boldsymbol{y}(t-\varepsilon) + \boldsymbol{v}(t-\varepsilon) = A\widetilde{\boldsymbol{y}}(t) + \widetilde{\boldsymbol{v}}(t).$$

Более того, решение $\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)$ осуществляет переход из начального множества M_0 на конечное множество M_1 на отрезке времени $[t_0+\varepsilon, t_1]$, поскольку выполняются включения (см. формулу (11.10))

$$\widetilde{\boldsymbol{y}}(t_0+\varepsilon) = \boldsymbol{y}(t_0) \in M_0, \qquad \widetilde{\boldsymbol{y}}(t_1) = \boldsymbol{y}(t_1-\varepsilon) \in M_1.$$

Дальнейшее доказательство будет симметрично повторять доказательство, приведенное в п. 1. для первого случая.

Поскольку $\widetilde{\boldsymbol{y}}(t_1) \in M_1$, то из условия трансверсальности на множестве M_1 для функции $\xi(t)$ следует неравенство

$$\begin{aligned}\xi(t_1) = \langle \widetilde{\boldsymbol{y}}(t_1), \boldsymbol{\psi}(t_1)\rangle - \langle \boldsymbol{x}(t_1), \boldsymbol{\psi}(t_1)\rangle = \\ = -\langle \widetilde{\boldsymbol{y}}(t_1), -\boldsymbol{\psi}(t_1)\rangle + c(M_1, -\boldsymbol{\psi}(t_1)) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом неравенства (11.9) на отрезке времени $I = [t_0+\varepsilon, t_1]$ получаем соотношение

$$\xi(t_0+\varepsilon) = \xi(t_1) - \int\limits_{t_0+\varepsilon}^{t_1} \dot{\xi}(s)\, ds \geqslant 0. \qquad (11.12)$$

Поскольку $\widetilde{\boldsymbol{y}}(t_0+\varepsilon) \in M_0$ и $\varepsilon > 0$, то из усиленного условия трансверсальности на множестве M_0 при $t = t_0+\varepsilon$ следует соотношение

$$\langle \widetilde{\boldsymbol{y}}(t+\varepsilon), \boldsymbol{\psi}(t_0+\varepsilon)\rangle \leqslant c(M_0, \boldsymbol{\psi}(t_0+\varepsilon)) < \langle \boldsymbol{x}(t_0+\varepsilon), \boldsymbol{\psi}(t_0+\varepsilon)\rangle.$$

Таким образом, для функции $\xi(t)$ получаем строгое неравенство

$$\xi(t_0+\varepsilon) = \langle \widetilde{\boldsymbol{y}}(t_0+\varepsilon), \boldsymbol{\psi}(t_0+\varepsilon)\rangle < 0,$$

которое противоречит неравенству (11.12).

Полученное противоречие означает, что управление $\boldsymbol{u}(t)$ оптимально, и тем самым теорема полностью доказана.

Как пользоваться теоремой о достаточных условиях оптимальности для решения линейной задачи быстродействия? Здесь можно предложить два способа.

Во-первых, найти все пары $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$, удовлетворяющие на каком-либо отрезке времени $[t_0, t_1]$ сопряженной функции $\boldsymbol{\psi}(t)$. Например, это можно сделать по схеме, данной в лекции 10. Затем для найденных решений $\boldsymbol{x}(t)$ проверить усиленные условия трансверсальности на множествах M_0 и M_1, т.е. проверить неравенства (11.6) и (11.7). Если хотя бы одно из них выполняется для решения $\boldsymbol{x}(t)$, то соответствующая пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$ оптимальна и, таким образом, задача быстродействия решена.

Во-вторых, можно из каких-либо физических или геометрических соображений выделить пару $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$, подозрительную на оптимальность. Затем попытаться подобрать для этой пары такую сопряженную функцию $\boldsymbol{\psi}(t)$, которая является решением сопряженной системы (11.2), удовлетворяет равенствам (11.3)–(11.5) и одному из неравенств (11.6) или (11.7). Если такую функцию $\boldsymbol{\psi}(t)$ удалось построить, то пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$ оптимальна. При этом способе не нужно искать все пары $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина. Эта задача довольно трудоемкая. Но при этом успех зависит от интуиции исследователя и частично от везения. Однако, решив определенное количество задач, нетрудно приобрести необходимую интуицию.

Конечно, в конкретной задаче может оказаться, что пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$ является оптимальной, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина с сопряженной функцией $\boldsymbol{\psi}(t)$, но ни одно из усиленных условий трансверсальности не выполняется. На то они и достаточные условия оптимальности, что между ними и необходимыми условиями (принципом максимума) может быть определенный зазор. Для решения такой задачи быстродействия необходимо отыскать на каком-либо отрезке времени $[t_0, t_1]$ все пары $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$, удовлетворяющие принципу максимума. Если такая пара окажется единственной (как это было в примерах 1 и 3 из лекции 10), то она оптимальна. Если же таких пар будет несколько (пример 2 из той же лекции), то из всех таких отрезков длиной $t_1 - t_0$ нужно выбрать отрезок минимальной длины. Соответствующая пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$ и будет оптимальной по быстродействию.

Заметим, что в данной теореме о достаточных условиях оптимальности множества M_0 и M_1 могут быть и невыпуклыми.

Покажем на примерах, как можно пользоваться достаточными условиями оптимальности для решения задачи быстродействия.

Пример 1. Рассмотрим задачу перевода объекта, описываемого системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = u^2, \quad |u^2| \leqslant 1, \end{cases}$$

из множества $M_0 = \{\boldsymbol{x} \in E^2 : x^1 = -\frac{5}{2}, |x^2| \leqslant 1\}$ на множество $M_1 = \{\boldsymbol{x} \in E^2 : 1 \leqslant x^1 \leqslant 2, x^2 = 0\}$ за наименьшее время. В предыдущей лекции для этой задачи было построено управление $\boldsymbol{u}(t)$ и решение $\boldsymbol{x}(t)$, осуществляющее переход из множества M_0 на множество M_1 на отрезке времени $I = [0, 3]$. Причем пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяла принципу максимума Понтрягина на этом отрезке времени. Решение $\boldsymbol{x}(t)$ имело вид

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{5}{2},\ t + 1\right), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ \left(-\frac{1}{2}t^2 + 3t - \frac{7}{2},\ -t + 3\right), & \text{если } 1 < t \leqslant 3. \end{cases}$$

Соответствующее решение $\boldsymbol{\psi}(t)$ сопряженной системы имело вид

$$\boldsymbol{\psi}(t) = (\psi^1(0),\ -\psi^1(0)t + \psi^2(0)),$$

причем начальное значение $(\psi^1(0), \psi^2(0)) \in S$ определялось из условия $\psi^2(\theta) = 0$, где $\theta = 1$. Нетрудно проверить, что функция $\boldsymbol{\psi}(t)$, удовлетворяющая этому условию, имеет вид

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Если мы покажем, что решение $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет усиленному условию трансверсальности (11.7) с функцией $\boldsymbol{\psi}(t)$ на отрезке времени $[0, 3]$, то по теореме о достаточных условиях оптимальности это решение $\boldsymbol{x}(t)$ и управление $\boldsymbol{u}(t)$ будут оптимальными. Покажем это. Опорная функция множества M_1 в данной задаче задается условием

$$c(M_1, \boldsymbol{\psi}) = \frac{3}{2}\psi^1 + \frac{1}{2}|\psi^1|.$$

Подставляя эту опорную функцию, решение $\boldsymbol{x}(t)$ и сопряженную функцию $\boldsymbol{\psi}(t)$ в неравенство (11.7), приводим его после несложных вычислений к виду

$$\frac{\sqrt{2}}{2}t^2 - \sqrt{2}t + \frac{5}{2}\sqrt{2} > 0, \qquad \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

и к виду

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2 + \sqrt{2}t + \frac{3}{2}\sqrt{2} > 0, \qquad \text{если} \quad 1 < t < 3.$$

Нетрудно проверить, что оба неравенства выполняются, когда t принимает значения из соответствующих промежутков. Следовательно, решение $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет усиленному условию трансверсальности на множестве M_1 с функцией $\boldsymbol{\psi}(t)$ на отрезке времени $[0, 3]$ и поэтому является оптимальным.

Рассмотрим теперь частный случай задачи быстродействия, когда конечное множество M_1 состоит из единственной точки $\boldsymbol{x}_1 = 0$, т.е. $M_1 = \{0\}$. Ясно, что если множество M_1 состоит из единственной точки $\boldsymbol{x}_1 \neq 0$, то линейной заменой переменных можно свести эту задачу к случаю $\boldsymbol{x}_1 = 0$. Оказывается, что для этого частного случая линейной задачи быстродействия можно получить более жесткие достаточные условия оптимальности, которые в действительности более просто проверяются.

Следствие. *Пусть $\boldsymbol{u}(t)$ — некоторое допустимое управление, а $\boldsymbol{x}(t)$ — соответствующее решение уравнения* (11.1), *переводяшее объект из множества M_0 на множество $M_1 = \{0\}$ на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$. Предположим, что пара $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке времени I. Далее, предположим, что объект* (11.1) *является локально управляемым в точке $\boldsymbol{x} = 0$ на любом отрезке времени $[\tau, t_1]$, $\tau \neq t_1$. Тогда управление $\boldsymbol{u}(t)$ оптимально.*

Доказательство. Покажем, что при данных предположениях решение $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет усиленному условию трансверсальности на множестве M_1 (11.7) с функцией $\boldsymbol{\psi}(t)$, которая соответствует паре $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{x}(t)$ в принципе максимума. Тогда согласно теореме о достаточных условиях оптимальности управление $\boldsymbol{u}(t)$ оптимально.

Соотношение (11.7) для множества $M_1 = \{0\}$ имеет вид

$$\langle \boldsymbol{x}(t), -\boldsymbol{\psi}(t)\rangle > 0 \tag{11.13}$$

и должно выполняться для всех $t_0 \leqslant t < t_1$. Зафиксируем некоторый момент времени $t = \tau$, удовлетворяющий неравенству $t_0 \leqslant \tau < t$. Рассмотрим множество P точек из фазового пространства E^n таких, из которых можно перейти в начало координат $\boldsymbol{x} = 0$ на отрезке времени $[\tau, t_1]$ по решениям уравнения (11.1) при всевозможных допустимых управлениях $\boldsymbol{u}(t)$. Покажем, что для любой точки $\boldsymbol{y} \in P$ выполняется неравенство

$$\langle \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(\tau), \boldsymbol{\psi}(\tau)\rangle \geqslant 0. \tag{11.14}$$

Действительно, возьмем произвольную точку $\boldsymbol{y} \in E^n$ уравнения (11.1), удовлетворяющую противоположному неравенству

$$\langle \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(\tau), \boldsymbol{\psi}(\tau)\rangle < 0,$$

и рассмотрим произвольное решение $\boldsymbol{y}(t)$ уравнения (11.1) с начальным условием $\boldsymbol{y}(\tau) = \boldsymbol{y}$. Тогда по аналогии с доказательством первой теоремы о достаточных условиях оптимальности имеем

$$\langle \boldsymbol{y}(t_1) - \boldsymbol{x}(t_1), \boldsymbol{\psi}(t_1)\rangle = \langle \boldsymbol{y}(\tau) - \boldsymbol{x}(\tau), \boldsymbol{\psi}(\tau)\rangle + \int\limits_{\tau}^{t_1} \dot{\xi}(t)\,dt < 0.$$

Так как $\boldsymbol{x}(t_1) = 0$, то отсюда следует, что $\langle \boldsymbol{y}(t_1), \boldsymbol{\psi}(t_1)\rangle < 0$, следовательно, $\boldsymbol{y}(t_1) \neq 0$, т.е. $\boldsymbol{y} \notin P$.

В силу неравенства (11.14) имеем

$$c(P, -\boldsymbol{\psi}(\tau)) = \max_{\boldsymbol{y}\in P} \langle \boldsymbol{y}, -\boldsymbol{\psi}(\tau)\rangle \leqslant \langle \boldsymbol{x}(\tau), -\boldsymbol{\psi}(\tau)\rangle. \tag{11.15}$$

Далее, так как по предположению объект является локально управляемым в точке $\boldsymbol{x} = 0$ на отрезке времени $[\tau, t_1]$ (см. лекцию 8), то существует $\varepsilon > 0$ такое, что выполнено включение $S_\varepsilon(0) \subset P$. Согласно свойству 8 опорных функций (см. лекцию 3), это означает, что $\varepsilon\|\boldsymbol{\psi}\| \leqslant c(P, \boldsymbol{\psi})$ для любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in E^n$. По формуле Коши имеем

$$\boldsymbol{\psi}(\tau) = e^{-(\tau - t_0)A^*}\boldsymbol{\psi}(t_0).$$

Так как $\|\psi(t_0)\| = 1$, а матрица $e^{-(\tau-t_0)A^*}$ невырождена, то $\|\psi(\tau)\| \neq 0$. Следовательно, $c(P, -\psi(\tau)) \geqslant \varepsilon\| - \psi(\tau)\| > 0$. В силу условия (11.15) получаем

$$\langle \boldsymbol{x}(\tau), -\boldsymbol{\psi}(\tau)\rangle \geqslant \mathrm{c}(P, -\boldsymbol{\psi}(\tau)) > 0.$$

Таким образом, доказано, что соотношение (11.13) выполнено для всех $t_0 \leqslant t < t_1$, и следствие доказано.

Пример 2. Рассмотрим задачу остановки маятника в положении равновесия, описываемого уравнением

$$\ddot{x} + x = f,$$

где x — отклонение маятника от состояния равновесия, f — сила, которую можно приложить к маятнику. Эта сила должна удовлетворять ограничению $|f| \leqslant 1$. Начальное положение маятника x_0 и начальная скорость $\dot{x}$ заданы. Требуется за наименьшее время перевести маятник в состояние равновесия, т.е. на множество $M_1 = \{(0, 0)\}$. Делая замену переменных $\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}$, $x^2 = \dot{x}$, $u^1 = 0$, $u^2 = f$, приведем эту задачу к стандартному виду. Уравнение движения будет записано в виде

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2, \quad |u^2| \leqslant 1. \end{cases} \tag{11.16}$$

Объект, описываемый уравнением (11.16), является локально управляемым в точке $\boldsymbol{x} = \{0\}$ на любом отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, $t_1 > t_0$. Действительно, применим теорему о локальной управляемости (см. лекцию 8). Положим $\boldsymbol{v} = (0, 1)$. Тогда $-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \in U$, а векторы $\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}$ линейно независимы, так как

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в силу данного выше следствия и теоремы о необходимых условиях оптимальности управление $\boldsymbol{u}(t)$ в этой задаче будет оптимальным тогда и только тогда, когда оно будет удовлетворять вместе с соответствующим решением $\boldsymbol{x}(t)$ принципу максимума Понтрягина.

6*

ЛЕКЦИЯ 12

- *Задача синтеза.*
- *Единственность оптимальных управлений.*
- *Условие общности положения.*

12.1. Понятие о задаче синтеза

Задачу синтеза оптимального управления рассмотрим на примере 2 из лекции 11. Поведение маятника описывается уравнением

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2, \end{cases} \tag{12.1}$$

ограничение на управление имеет вид $u^1 = 0$, $|u^2| \leqslant 1$. Требуется за наименьшее время остановить маятник в положении равновесия, т.е. перевести его из состояния $M_0 = \{\boldsymbol{x}_0\}$ в состояние покоя $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Такая задача может возникнуть в каком-либо реальном техническом объекте. При этом может оказаться, что начальное состояние $\boldsymbol{x}_0$ заранее неизвестно. Например, маятник под действием каких-либо неизвестных сил переходит в состояние $\boldsymbol{x}_0$ и нужно как можно скорее вернуть его в состояние покоя. Поэтому необходимо заранее решить задачу быстродействия для произвольного начального значения $\boldsymbol{x}_0$. Эта задача носит название *задачи синтеза оптимального управления.*

В предыдущей лекции было показано (см. пример 2), что для данной задачи быстродействия применимо следствие первой теоремы о достаточных условиях оптимальности и что для оптимальности некоторого управления $\boldsymbol{u}(t)$ необходимо и достаточно, чтобы это управление и соответствующее решение $\boldsymbol{x}(t)$ уравнения (12.1) удовлетворяли принципу максимума Понтрягина.

Найдем все управления, удовлетворяющие этому принципу. Перепишем его применительно к нашей задаче (см. лекцию 9).

Сопряженная система уравнений, очевидно, имеет вид

$$\begin{cases} \dot\psi^1 = \psi^2, \\ \dot\psi^2 = -\psi^1. \end{cases} \tag{12.2}$$

Опорные функции множеств U, M_0 и M_1 вычисляются непосредственно. Имеем

$$c(U,\boldsymbol{\psi}) = |\psi^2|, \quad c(M_0,\boldsymbol{\psi}) = \langle \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\psi}\rangle, \quad c(M_1,\boldsymbol{\psi}) = 0.$$

Условие максимума запишется в виде $u^2(t)\psi^2(t) = |\psi^2(t)|$, т.е.

$$\begin{aligned} u^2(t) &= +1, \quad \text{если} \quad \psi^2(t) > 0, \\ u^2(t) &= -1, \quad \text{если} \quad \psi^2(t) < 0, \\ -1 \leqslant u^2(t) &\leqslant +1, \quad \text{если} \quad \psi^2(t) = 0. \end{aligned} \tag{12.3}$$

Поскольку множества M_0 и M_1 состоят из одной точки, то очевидно, что условия трансверсальности на множестве M_0 и на множестве M_1 будут выполняться тривиальным образом. Они не накладывают никаких ограничений на решение $\boldsymbol{x}(t)$, кроме $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}(t_1) = \mathbf{0}$. Таким образом, в данной задаче пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке времени $[t_0,t_1]$, если существует такое решение $\boldsymbol{\psi}(t)$ сопряженной системы (12.2) с начальным условием $\boldsymbol{\psi}(t_0) \in S$, что выполняется соотношение (12.3).

Найдем решение сопряженной системы (12.2) с произвольным начальным условием $\boldsymbol{\psi}(t_0) \in S$. Для этого начальный вектор $\boldsymbol{\psi}(t_0)$ зададим в виде $\boldsymbol{\psi}(t_0) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, где α — произвольное число из отрезка $[0, 2\pi]$. Решая уравнение (12.2) с этим начальным вектором, получаем

$$\psi^1(t) = \cos(\alpha + t_0 - t), \quad \psi^2(t) = \sin(\alpha + t_0 - t).$$

Управление $u^2(t)$, удовлетворяющее условию максимума (12.3), определяется функцией $\psi^2(t)$. Рассмотрим поведение функции $\psi^2(t)$ на произвольном отрезке времени $[t_0,t_1]$. Эта функция изображена на рис. 55.

Во-первых, функция $\psi^2(t)$ обязательно меняет свой знак через промежуток времени π. Во-вторых, первая после момента времени t_0 смена знака у функции $\psi^2(t)$ может произойти через произвольный промежуток времени $\tau \leqslant \pi$. При этом на отрезке

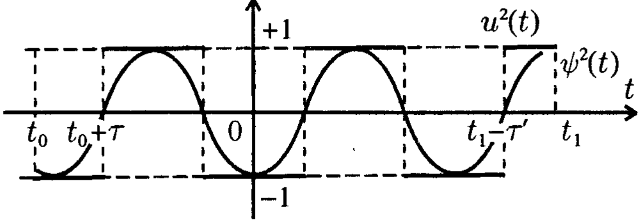


Рис. 55

времени $[t_0, t_0 + \tau]$ функция $\psi^2(t)$ может быть как положительной, так и отрицательной. Этого можно добиться выбором соответствующего числа $\alpha \in [0, 2\pi]$. И наконец, промежуток времени от последнего момента смены знака у функции $\psi^2(t)$ до конца отрезка t_1 также может быть произвольным числом $\tau' \leqslant \pi$. При этом на отрезке времени $[t_1 - \tau', t_1]$ функция $\psi^2(t)$ может быть как положительной, так и отрицательной, что также достигается выбором соответствующего значения $\alpha \in [0, 2\pi]$.

В соответствии с этим управление $u^2(t)$, удовлетворяющее условию максимума (12.3), на отрезке времени $[t_0, t_0+\tau]$, $\tau \leqslant \pi$, может равняться либо $+1$, либо -1, затем оно меняет свой знак несколько раз через промежуток времени π и, наконец, на отрезке времени $[t_1 - \tau', t_1]$, $\tau' \leqslant \pi$ также может равняться либо $+1$, либо -1.

В фазовой плоскости E^2 построим кривые, по которым происходит движение траектории $\boldsymbol{x}(t)$ уравнения (12.1) при управлении $u^2(t) = +1$ и при $u^2(t) = -1$. Если $u^2(t) = +1$, то уравнение (12.1) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + 1. \end{array} \right. \tag{12.4}$$

Деля первое уравнение на второе и интегрируя, получаем в плоскости E^2 семейство кривых

$$(x^1 - 1)^2 + (x^2)^2 = c^2,$$

где c — константа, определяемая начальной точкой траектории. Эти кривые являются окружностями с центром в точке $(1, 0)$ — тип 1. Они изображены на рис. 56.

Движение по окружностям происходит по часовой стрелке с постоянной угловой скоростью, причем полный оборот по

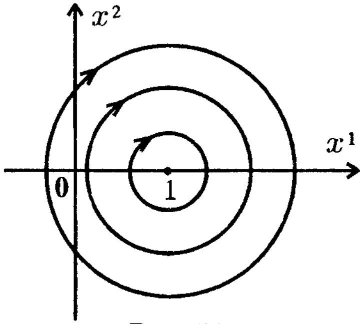


Рис. 56

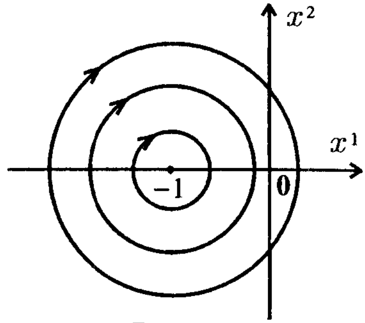


Рис. 57

окружности совершается за время 2π. Это определяется тем, что произвольное решение $\boldsymbol{x}(t)$ уравнения (12.1) имеет вид

$$\boldsymbol{x}(t) = (1 + c\cos(\varphi - t),\ c\sin(\varphi - t)).$$

Аналогичным образом получаем, что при $u^2(t) = -1$ движение фазовой точки $\boldsymbol{x}(t)$ происходит по окружностям с центром в точке $(-1, 0)$ — тип 2 — также по часовой стрелке с постоянной угловой скоростью, причем полный оборот по окружности совершается за время 2π. Таким образом, в те моменты времени t, когда $u^2(t) = +1$, фазовая точка $\boldsymbol{x}(t)$ движется по окружностям типа 1, изображенным на рис. 56, а в те моменты времени t, когда $u^2(t) = -1$, фазовая точка $\boldsymbol{x}(t)$ движется по окружностям типа 2, изображенным на рис. 57.

Для решения задачи синтеза оптимального управления поступим следующим образом. Найдем все точки фазовой плоскости, из которых можно перейти в соответствии с принципом максимума в начало координат $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ без переключений управления $u^2(t)$. При этом время перехода $T = t_1 - t_0$ не может быть больше π. При $u^2(t) \equiv +1$ можно перейти в начало координат $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ из всех точек полуокружности типа 1, соединяющей точки $(0, 0)$ и $(2, 0)$. Она изображена на рис. 58. При этом из точки $(2, 0)$ время перехода $T = \pi$. Аналогично при $u^2(t) \equiv -1$ можно перейти в начало координат $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ из всех точек полуокружности типа 2, соединяющей точки $(0, 0)$ и $(-2, 0)$ (см. рис. 58).

Найдем теперь все точки фазового пространства, из которых можно перейти в соответствии с принципом максимума в начало координат с одним переключением управления $u^2(t)$. Если управление $u^2(t)$ сначала равняется -1, а затем $+1$, то траектория $\boldsymbol{x}(t)$ идет сначала по окружности типа 2,а затем по окружности типа 1. Но единственная полуокружность типа 1,

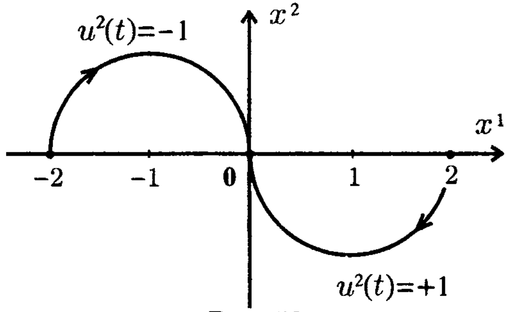


Рис. 58

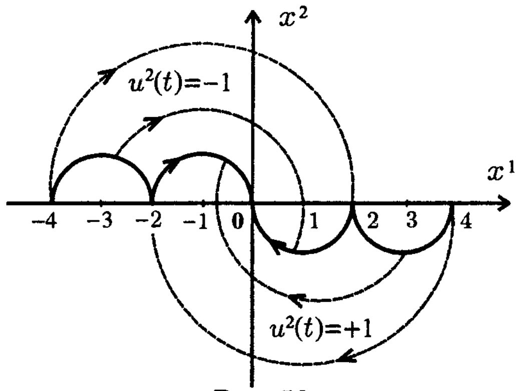


Рис. 59

по которой можно прийти в начало координат без переключения, изображена на рис. 58. Таким образом, нужно найти все точки фазовой плоскости, из которых можно попасть на эту полуокружность типа 1 по всевозможным окружностям типа 2. При этом двигаться по таким окружностям точка $\boldsymbol{x}(t)$ может не больше, чем время π. Все такие точки изображены на рис. 59. Аналогично строят все точки, из которых можно перейти в $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ с управлением $u_2(t)$, принимающим значения сначала $+1$, а затем -1. Такие точки также изображены на рис. 59.

Найдем теперь все точки, из которых можно перейти в $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ с двумя переключениями управления $u^2(t)$. Пусть $u^2(t)$ сначала принимает значение $+1$, затем -1 и в конце движения снова $+1$. Тогда время движения с управлением $u^2(t) = -1$ должно равняться π. Таким образом, к точкам, изображенным на рис. 58, нужно добавить еще те точки плоскости, из которых

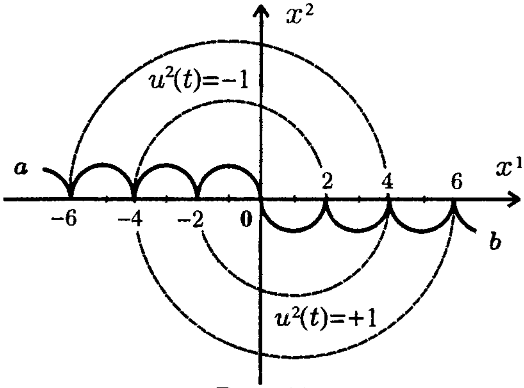


Рис. 60

можно перейти с управлением $u^2(t) = +1$ по окружностям типа 1 на полуокружность, соединяющую точки $(0, -4)$ и $(0, -2)$, за время, меньшее или равное π. Аналогично находим точки, из которых возможен переход в начало координат с управлением $u^2(t)$, принимающим последовательно значения -1, $+1$, -1.

Множество всех точек, из которых возможен переход в начало координат не более чем с двумя переключениями, изображено на рис. 59. Продолжая этот процесс далее, для каждой точки фазовой плоскости $\boldsymbol{x}_0 \in E^2$ построим управление $\boldsymbol{u}(t) = (0, u^2(t))$ и соответствующее решение $\boldsymbol{x}(t)$, переводящее эту точку $\boldsymbol{x}_0$ в начало координат $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, причем пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина (рис. 60). Следовательно, такое управление $\boldsymbol{u}(t)$ оптимально. Оптимальное управление $u^2(t)$ меняет свой знак на кривой $\boldsymbol{a0b}$, состоящей из полуокружностей единичного радиуса. При этом выше этой кривой и на ее части $\boldsymbol{a0}$ оптимальное управление имеет вид $u^2(t) = -1$, а ниже кривой $\boldsymbol{a0b}$ и на ее части $\boldsymbol{0b}$ — вид $u^2(t) = +1$. Теперь если уравнение (12.1) описывает поведение какого-либо технического объекта, то для него несложно построить автоматический оптимальный регулятор, который по фазовому состоянию объекта $\boldsymbol{x}$ будет вырабатывать оптимальное управление $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (0, u^2(\boldsymbol{x}))$. Действительно, если фазовая точка $\boldsymbol{x}$ лежит выше кривой $\boldsymbol{a0b}$ или на ее части $\boldsymbol{a0}$, то автоматический регулятор должен выработать управление $u^2(\boldsymbol{x}) = -1$, а если точка $\boldsymbol{x}$ лежит ниже кривой $\boldsymbol{a0b}$ или на ее части $\boldsymbol{0b}$, то регулятор должен выработать управление $u^2(\boldsymbol{x}) = +1$. Таким образом построенная функция $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (0, u^2(\boldsymbol{x}))$ называется *оптимальной синтезирующей функцией*.

Заметим, что теперь не важно, в какую начальную точку $\boldsymbol{x}_0$ под действием случайных сил будет заброшен маятник. Автоматический регулятор, вырабатывающий функцию $u^2(\boldsymbol{x})$, приведет его в состояние покоя за наименьшее время. Более того, в процессе этого перехода из точки $\boldsymbol{x}_0$ в точку $\boldsymbol{x} = 0$ на маятник может снова подействовать какая-либо случайная сила и забросить его в новую точку $\boldsymbol{x}_0'$. При этом автоматический регулятор будет переводить маятник из этой точки $\boldsymbol{x}_0'$ в состояние покоя за наименьшее время. Если бы регулятор вырабатывал оптимальное управление в виде $u^2(t)$ для заданной начальной точки $\boldsymbol{x}_0$, то такой учет текущих возмущений был бы невозможен.

Отсюда ясно, что с практической точки зрения очень важно уметь строить для управляемого объекта синтезирующую функцию $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$. Для большого класса линейных задач быстродействия такую синтезирующую функцию $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ всегда можно построить с помощью принципа максимума Понтрягина таким же образом, как и для маятника, описываемого уравнением (12.1).

12.2. Единственность оптимального управления

В лекции 10 остался невыясненным вопрос: при каких условиях на задачу быстродействия для заданного начального значения сопряженной функции $\boldsymbol{\psi}(t_0) \in S$ существует единственная пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$, удовлетворяющая принципу максимума Понтрягина? В соответствии со схемой, приведенной на рис. 40, неоднозначность может возникнуть лишь в двух местах. Начальное значение фазового вектора $\boldsymbol{x}(t_0) \in M_0$ может определяться из условия трансверсальности на множестве M_0

$$\langle \boldsymbol{x}(t_0), \boldsymbol{\psi}(t_0) \rangle = c(M_0, \boldsymbol{\psi}(t_0)) \tag{12.5}$$

неединственным образом, также и управление $\boldsymbol{u}(t) \in U(t)$ может определяться из условия максимума

$$\langle \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle = c(U, \boldsymbol{\psi}(t)) \tag{12.6}$$

неединственным образом. Заметим, что единственность управления $\boldsymbol{u}(t)$ здесь понимается в том смысле, что две измеримые функции равны на некотором отрезке времени, если они совпадают почти всюду на этом отрезке.

Рассмотрим, когда на этих этапах будет однозначное соответствие и, следовательно, когда данному значению $\psi(t_0) \in S$ будет соответствовать единственная пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$, удовлетворяющая принципу максимума.

Первая теорема единственности. *Пусть задано начальное значение $\psi(t_0) \in S$ и соответствующее решение $\psi(t)$ сопряженной системы на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$. Предположим, что опорная функция $c(M_0, \psi)$ является дифференцируемой по ψ в точке $\psi(t_0)$, т. е. в этой точке существует градиент функции $c(M_0, \cdot) : E^n \to E^1$. Далее, предположим, что для почти всех $t \in I$ опорная функция $c(U, \psi)$ дифференцируема по ψ в точке $\psi(t)$. Тогда соответствующая пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$, удовлетворяющая принципу максимума Понтрягина, является единственной.*

Доказательство. Геометрически дифференцируемость функции $c(M_0, \psi)$ по ψ в точке $\psi(t_0)$ означает, что опорное множество для множества M_0 в направлении $\psi(t_0)$ состоит из единственной точки и эта точка есть вектор $\frac{\partial c(M_0, \psi(t_0))}{\partial \psi}$. Доказательство этого факта приведено в разделе Д5 дополнений. Точно так же дифференцируемость функции $c(U, \psi)$ по ψ в точке $\psi(t)$ означает, что опорное множество для множества U состоит из единственной точки и эта точка есть $\frac{\partial c(U, \psi(t))}{\partial \psi}$. Следовательно, из условия (12.5) определяется единственный вектор $\boldsymbol{x}(t_0) = \frac{\partial c(M_0, \psi(t_0))}{\partial \psi}$, а из условия (12.6) определяется при почти всех $t \in I$ единственный вектор $\boldsymbol{u}(t) = \frac{\partial c(U, \psi(t))}{\partial \psi}$. Теорема доказана.

Назовем множество F *строго выпуклым*, если любая его опорная гиперплоскость пересекается с ним в единственной точке.

Следствие. *Пусть множество M_0 строго выпукло и множество U также строго выпукло для почти всех $t \in I$. Тогда для любого начального значения $\psi(t_0) \in S$ соответствующая пара $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t)$, удовлетворяющая принципу максимума, является единственной.*

Доказательство этого следствия непосредственно вытекает из геометрического смысла дифференцируемости опорной функции.

12.3. Условие общности положения*

Рассмотрим задачу быстродействия для объекта, описываемого уравнением

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}, \tag{12.7}$$

в случае, когда множество U, задающее ограничения на управление $\boldsymbol{u}(t)$, является выпуклым замкнутым ограниченным *многогранником* из E^n. При этом множества начальных состояний M_0 и конечных состояний M_1 будем, как и ранее, считать непустыми выпуклыми компактами из E^n.

Напомним, что выпуклый замкнутый многогранник Q из E^n представляет собой пересечение конечного числа замкнутых полупространств, т.е. задается конечным числом линейных неравенств:

$$Q = \{\boldsymbol{x} \in E^n : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_j \rangle \leqslant a_j, \ j = 1, 2, \ldots, s\}.$$

Случай, когда множество U — выпуклый замкнутый ограниченный многогранник, представляет большой интерес, поскольку он часто встречается в приложениях. Этот случай является достаточно общим, поскольку любой выпуклый компакт U из E^n можно сколь угодно точно приблизить в хаусдорфовой метрике выпуклым замкнутым ограниченным многогранником Q.

Так как произвольная гиперплоскость

$$\Gamma = \{\boldsymbol{x} \in E^n : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \rangle = a\}, \quad \boldsymbol{b} \neq 0$$

может быть представлена в виде

$$\Gamma = \{\boldsymbol{x} \in E^n : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \rangle \leqslant a, \ \langle \boldsymbol{x}, -\boldsymbol{b} \rangle \leqslant -a\},$$

то гиперплоскость является выпуклым замкнутым многогранником. Отсюда следует, что любое опорное множество Q' выпуклого замкнутого многогранника Q снова является выпуклым замкнутым многогранником. Опорные множества многогранника Q будем называть его *гранями*. Таким образом, произвольная грань Q' многогранника Q, если она не совпадает с самим многогранником Q, является многогранником меньшей размерности, чем Q (определение размерности выпуклого множества

*Данный раздел содержит классические результаты линейной теории оптимального управления [1], дополняющие содержание этой и предыдущей лекций, и был добавлен в рукопись С.М. Асеевым.

см. в разделе Д7 дополнений). При этом нетрудно видеть, что все грани многогранника Q' являются также гранями исходного многогранника Q. В случае, когда выпуклый замкнутый многогранник Q ограничен, у него обязательно существует конечное число граней нулевой размерности, т.е. граней, состоящих из одной точки. Такие грани называют *вершинами* многогранника Q. Грани, имеющие единичную размерность, называют *ребрами* многогранника Q. Если многогранник Q ограничен и $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_s$ — его вершины, то многогранник Q совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин, а каждое его ребро w является выпуклой оболочкой каких-то двух соседних вершин (рис. 61), т.е. является отрезком.

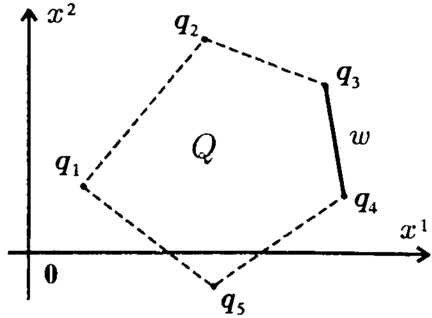


Рис. 61

Пусть ребро w является выпуклой оболочкой вершин $\boldsymbol{q}_i$ и $\boldsymbol{q}_j$, т.е. $w = \operatorname{conv}\{\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_j\}$. Тогда будем говорить, что вектор $\boldsymbol{v} = \lambda(\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_j)$, где $\lambda \neq 0$, имеет направление ребра w многогранника Q.

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнения (12.7) и расположение выпуклого замкнутого ограниченного многогранника U в пространстве E^n удовлетворяют *условию общности положения*, которое состоит в том, что если вектор $\boldsymbol{v}$ имеет направление одного из ребер многогранника U, то векторы

$$\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}, \ldots, A^{n-1}\boldsymbol{v} \tag{12.8}$$

линейно независимы.

Поясним геометрический смысл условия общности положения. Для этого нам потребуется понятие инвариантного подпространства.

Будем говорить, что линейное подпространство L пространства E^n является *инвариантным* относительно преобразования* A, если для любого вектора $\boldsymbol{x} \in L$ вектор $A\boldsymbol{x}$ снова принадлежит

*Под преобразованием A здесь понимается отображение, порожденное матрицей A и ставящее в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{x}$ из E^n его образ $A\boldsymbol{x}$.

подпространству L. Подпространство L называется *собственным*, если оно не совпадает со всем пространством E^n и не состоит только из нуля. Легко видеть, что отличный от нуля вектор $\boldsymbol{x}$ принадлежит некоторому собственному инвариантному относительно преобразования A подпространству L в том и только в том случае, когда векторы

$$\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, \ldots, A^{n-1}\boldsymbol{x}$$

линейно зависимы.

Таким образом, выполнение условия общности положения означает, что никакой вектор $\boldsymbol{v}$, имеющий направление какого-либо ребра многогранника U, не принадлежит никакому собственному подпространству, инвариантному относительно преобразования A.

Пусть векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ являются вершинами многогранника U. Так как любой вектор $\boldsymbol{v}$, имеющий направление некоторого ребра w многогранника U, имеет вид $\boldsymbol{v} = \lambda(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j)$, где $\lambda \neq 0$ и $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{u}_j$ — соответствующие вершины, то условие общности положения, очевидно, выполняется, если все определители матриц, составленных из столбцов $\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j$, $A(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j), \ldots$ $\ldots, A^{n-1}(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j)$ при $i \neq j$, отличны от нуля. Нетрудно видеть, что для любой матрицы A и для любого выпуклого замкнутого ограниченного многогранника U всегда можно так сколь угодно мало изменить элементы a_{ij} матрицы A, что все такие определители будут отличны от нуля и, следовательно, будет выполняться условие общности положения. Если же условие общности положения выполняется, то, поскольку выпуклый многогранник U имеет конечное число ребер, это условие нельзя нарушить произвольно малым изменением элементов матрицы A и вершин многогранника U.

Таким образом, условие общности положения не является обременительным, поскольку оно не выполняется только в исключительных случаях, а его выполнение всегда можно обеспечить малым изменением элементов матрицы A. Кроме того, это свойство параметров управляемой системы (коэффициентов уравнения (12.7) и координат вершин многогранника U) является устойчивым относительно малых возмущений.

Как показывает следующий результат, выполнение условия общности положения гарантирует, что по любому нетривиальному решению $\boldsymbol{\psi}(t)$ сопряженной системы (11.2) единственным образом определяется управление $u(t)$, удовлетворяющее условию максимума (11.3), как кусочно постоянная функция, принимающая значения в вершинах многогранника U.

Теорема о конечном числе переключений. *Пусть выполнено условие общности положения и $\psi(t)$ — произвольное ненулевое решение сопряженной системы* (11.2) *на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$. Тогда, за исключением, быть может, конечного числа моментов времени t, условие максимума* (11.3) *однозначно определяет значение управления $u(t)$ как одну из вершин многогранника U. При этом данное управление $u(t)$ может иметь не более конечного числа точек разрыва.*

Доказательство. Рассмотрим условие максимума

$$\langle u, \psi(t)\rangle = c(U, \psi(t)) \tag{12.9}$$

как уравнение относительно неизвестного вектора $u \in U$ при фиксированном t. Тогда в силу линейности скалярного произведения функция $\langle u, \psi(t)\rangle$ переменной u либо постоянна на U, либо достигает своего максимума на какой-то грани U' многогранника U размерности меньшей, чем размерность многогранника U. Это может быть либо грань нулевой размерности, т.е. вершина, либо некоторая грань U' ненулевой размерности. В последнем случае функция $\langle u, \psi(t)\rangle$ постоянна на U' и, следовательно, постоянна на некотором ребре (грани единичной размерности) w многогранника U'. Поскольку каждая грань многогранника U' является также гранью многогранника U, то это ребро w является ребром многогранника U. Итак, либо единственной точкой максимума функции $\langle u, \psi(t)\rangle$ является некоторая вершина многогранника U, либо максимум достигается во всех точках некоторого ребра w этого многогранника. Покажем, что в силу условия общности положения этот максимум может достигаться на каком-либо ребре w только для конечного числа значений t.

Действительно, предположим противное, т.е. предположим, что максимум функции $\langle u, \psi(t)\rangle$ достигается на ребре многогранника U для бесконечного числа значений t. Тогда, поскольку число ребер многогранника U конечно, то найдется ребро w, на котором максимум достигается в счетном числе моментов времени $\tau_1, \tau_2, \ldots \in I$. Пусть это ребро w образовано вершинами u' и u''. Тогда $\langle u', \psi(\tau_i)\rangle = \langle u'', \psi(\tau_i)\rangle$, $i = 1, 2, \ldots$ Следовательно, для вектора $v = u' - u''$, имеющего направление ребра w,

имеем
$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}(\tau_i)\rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$
Поскольку функция $\boldsymbol{\psi}(t)$ как решение линейной системы дифференциальных уравнений (11.2) является аналитической, отсюда следует, что $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}(t)\rangle = 0$ для всех точек $t \in I$. Продифференцировав последовательно $n-1$ раз тождество $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}(t)\rangle \equiv 0$ во внутренних точках отрезка I и воспользовавшись тем, что функция $\boldsymbol{\psi}(t)$ — решение сопряженной системы (11.2), получим следующие n тождеств на I:
$$\begin{array}{ll} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}(t)\rangle \equiv 0 & \forall t \in I, \\ \langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}(t)\rangle \equiv 0 & \forall t \in I, \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ \langle A^{n-1}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}(t)\rangle \equiv 0 & \forall t \in I. \end{array}$$
В силу условия общности положения векторы (12.8) линейно независимы. Следовательно, $\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{0}$ на I, что противоречит предположению о нетривиальности функции $\boldsymbol{\psi}(t)$.

Итак, доказано, что, за исключением, быть может, конечного числа значений t, управление $\boldsymbol{u}(t)$ однозначно определяется функцией $\boldsymbol{\psi}(t)$ из условия максимума (12.9) как некоторая вершина многогранника U. Пусть $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_N$ — те исключительные значения времени, при которых управление $\boldsymbol{u}(t)$ не определяется однозначно из условия максимума (12.9). Докажем, что на каждом интервале $J_i = (\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$ управление $\boldsymbol{u}(t)$ постоянно. Пусть $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ — все вершины многогранника U. Обозначим через $M_{i,j} = \{t \in J_i : \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_j\}$, $i = 1, \ldots, N-1$, $j = 1, \ldots, m$ совокупность тех точек множества J_i, в которых значением управления $\boldsymbol{u}(t)$ является вершина $\boldsymbol{u}_j$. При этом некоторые из множеств $M_{i,j}$ могут оказаться пустыми. Очевидно, множества $M_{i,j}$ попарно не пересекаются и $\bigcup_{j=1,\ldots,m} M_{i,j} = J_i$.

Выберем какое-либо непустое множество $M_{i,r}$. Пусть τ — некоторая точка множества $M_{i,r}$. В силу условия максимума (12.9) и определения множества $M_{i,r}$ имеем $\langle \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{\psi}(\tau)\rangle > \langle \boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{\psi}(\tau)\rangle$ при $j \neq r$, а в силу непрерывности функции $\boldsymbol{\psi}(t)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что неравенство $\langle \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{\psi}(t)\rangle > \langle \boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{\psi}(t)\rangle$ выполняется для всех $t \in \{t \in J_i : |t - \tau| < \varepsilon\}$, $j \neq r$. Таким образом, множество $M_{i,r}$ является открытым. С другой стороны, это множество $M_{i,r}$ является замкнутым в J_i. Действительно, пусть τ — предельная точка множества $M_{i,r}$, принадлежащая множеству J_i. Это означает, что найдется такая последовательность точек $\{\tau_k\} \in M_{i,r}$, $k = 1, 2, \ldots$, что $\tau_k \to \tau$. В силу определения множества $M_{i,r}$ выполняется равенство $\langle \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{\psi}(\tau_k)\rangle = c(U, \boldsymbol{\psi}(\tau_k))$. В силу непрерывности скалярного произведения, непрерывности опорной функции и непрерывности функции $\boldsymbol{\psi}(t)$, переходя в последнем равенстве к пределу при $k \to \infty$, получаем $\langle \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{\psi}(\tau)\rangle = c(U, \boldsymbol{\psi}(\tau))$. Следовательно, $\tau \in M_{i,r}$. Таким образом, множество $M_{i,r}$ замкнуто в J_i. Поскольку интервал $J_i = (\tau_i, \tau_{i+1})$ — множество связное, а выбранное непустое множество $M_{i,r}$ одновременно открыто и замкнуто в J_i, то $M_{i,r} = J_i$. Остальные же множества $M_{i,j}$ при $j \neq r$ пусты. Итак, на каждом интервале J_i управление $\boldsymbol{u}(t)$ постоянно. Теорема доказана.

Поскольку изменение значения управления на множестве нулевой меры не оказывает никакого влияния на траекторию системы, то при выполнении условия общности положения в данной задаче быстродействия в качестве допустимых управлений можно рассматривать класс кусочно постоянных и непрерывных слева управлений. Этот класс управлений состоит из функций, имеющих не более конечного числа точек разрыва (называемых *точками переключения*), постоянных на каждом интервале непрерывности и имеющих в каждой точке разрыва своим значением предел слева. Действительно, если в исходной задаче выполняется условие общности положения и система управляема из M_0 на M_1, то в силу теоремы существования оптимального управления (см. лекцию 9) оптимальное по быстродействию управление существует в классе измеримых управлений. Далее, оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Следовательно, в силу теоремы о конечном числе переключений, переопределив, если это необходимо, оптимальное управление на множестве нулевой меры, можно считать его кусочно постоянным и непрерывным слева.

В некоторых важных случаях условие общности положения позволяет гарантировать оптимальность управления, удовлетворяющего принципу максимума Понтрягина, и единственность оптимального управления.

Вторая теорема единственности. *Пусть выполнено условие общности положения. Предположим, что управления $\boldsymbol{u}_1(t)$ и $\boldsymbol{u}_2(t)$ переводят систему из точки $\boldsymbol{x}_0$ в точку $\boldsymbol{x}_1$ на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$. Предположим также, что каж-*

дое из этих управлений удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Тогда управления $\boldsymbol{u}_1(t)$ и $\boldsymbol{u}_2(t)$ совпадают.

Доказательство. Поскольку начальное и конечное состояния траекторий, соответствующих управлениям $\boldsymbol{u}_1(t)$ и $\boldsymbol{u}_2(t)$, совпадают, то в силу формулы Коши (см. лекцию 6) имеем

$$\boldsymbol{x}_1 = e^{(t_1-t_0)A}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-s)A}\boldsymbol{u}_1(s)\,ds = \\ = e^{(t_1-t_0)A}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-s)A}\boldsymbol{u}_2(s)ds.$$

Следовательно,

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-s)A}(\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s))ds = 0. \tag{12.10}$$

Пусть управлению $\boldsymbol{u}_1(t)$ соответствует в силу принципа максимума Понтрягина сопряженная функция $\boldsymbol{\psi}_1(t)$. Умножив скалярно равенство (12.10) на вектор $\boldsymbol{\psi}_1(t_1)$, получаем

$$\int_{t_0}^{t_1}\langle\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s), e^{(t_1-s)A^*}\boldsymbol{\psi}_1(t_1)\rangle ds = 0$$

или (см. формулу (9.11))

$$\int_{t_0}^{t_1}\langle\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s), \boldsymbol{\psi}_1(s)\rangle ds = 0.$$

Отсюда в силу условия максимума следует равенство

$$\int_{t_0}^{t_1}(c(U, \boldsymbol{\psi}_1(s)) - \langle\boldsymbol{u}_2(s), \boldsymbol{\psi}_1(s)\rangle)ds = 0.$$

Поскольку подынтегральное выражение в последнем равенстве неотрицательно, то для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ для управления $\boldsymbol{u}_2(t)$ выполняется условие максимума с сопряженной функцией $\boldsymbol{\psi}_1(t)$

$$\langle\boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{\psi}_1(t)\rangle = c(U, \boldsymbol{\psi}_1(t)),$$

отсюда в силу теоремы о конечном числе переключений получаем, что $\boldsymbol{u}_1(t) = \boldsymbol{u}_2(t)$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть выполнено условие общности положения. Тогда если система управляема из точки $\boldsymbol{x}_0$ в точку $\boldsymbol{x}_1$, то оптимальное по быстродействию управление $\boldsymbol{u}(t)$ существует и единственно.*

Доказательство данного следствия непосредственно вытекает из теоремы существования оптимального управления (см. лекцию 9) и второй теоремы единственности. Здесь измеримые управления $\boldsymbol{u}_1(t)$ и $\boldsymbol{u}_2(t)$ считаются совпадающими, если $\boldsymbol{u}_1(t) = \boldsymbol{u}_2(t)$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$.

Вторая теорема о достаточных условиях оптимальности. *Пусть выполнено условие общности положения, множество M_0 состоит из единственной точки $\boldsymbol{x}_0$, а множество M_1 состоит из единственной точки $\mathbf{0}$. Пусть, кроме того, $\mathbf{0} \in U$ и начало координат не является вершиной многогранника U. Тогда если управление $\boldsymbol{u}(t)$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на некотором отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, то оно оптимально и $T = t_1 - t_0$ — время быстродействия.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что существует такое допустимое управление $\boldsymbol{u}_2(t)$, переводящее систему из точки $\boldsymbol{x}_0$ в начало координат на отрезке времени $I' = [t_0, t_2]$, где $t_2 < t_1$. Пусть $\boldsymbol{\psi}_1(t)$ — ненулевая сопряженная функция, соответствующая в силу принципа максимума Понтрягина управлению $\boldsymbol{u}_1(t)$.

Поскольку управление $\boldsymbol{u}_1(t)$ переводит точку $\boldsymbol{x}_0$ на отрезке времени I в начало координат, то в силу формулы Коши имеем

$$e^{(t_1-t_0)A}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-s)A}\boldsymbol{u}_1(s)ds =$$

$$= e^{(t_1-t_2)A}\left(e^{(t_2-t_0)A}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_2-s)A}\boldsymbol{u}_1(s)ds\right) = \mathbf{0}.$$

Так как матрица $e^{(t_1-t_2)A}$ невырожденная, то из последнего равенства получаем

$$e^{(t_2-t_0)A}\boldsymbol{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{(t_2-s)A}\boldsymbol{u}_1(s)ds = \boldsymbol{0}. \qquad (12.11)$$

Поскольку управление $\boldsymbol{u}_2(t)$ также переводит точку $\boldsymbol{x}_0$ на своем отрезке времени $I' = [t_0, t_2]$ в начало координат, то в силу формулы Коши имеем

$$e^{(t_2-t_0)A}\boldsymbol{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t_2} e^{(t_2-s)A}\boldsymbol{u}_2(s)ds = \boldsymbol{0},$$

откуда в силу равенства (12.11) получаем

$$\int\limits_{t_0}^{t_2} e^{(t_2-s)A}(\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s))ds + \int\limits_{t_2}^{t_1} e^{(t_2-s)A}\boldsymbol{u}_1(s)ds = \boldsymbol{0}.$$

Умножив скалярно последнее равенство на вектор $\boldsymbol{\psi}_1(t_2)$, получим

$$\int\limits_{t_0}^{t_2}\langle\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s), \boldsymbol{\psi}_1(s)\rangle ds + \int\limits_{t_2}^{t_1}\langle\boldsymbol{u}_1(s), \boldsymbol{\psi}_1(s)\rangle ds = 0. \qquad (12.12)$$

Далее, так как в силу условия максимума для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ имеет место равенство $\langle\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{\psi}_1(t)\rangle = c(U, \boldsymbol{\psi}_1(t))$, то в равенстве (12.12) подынтегральное выражение в первом слагаемом неотрицательно и, следовательно, первое слагаемое также неотрицательно. Следовательно, второе слагаемое в равенстве (12.12) неположительно. С другой стороны, поскольку $\boldsymbol{0} \in U$, то

$$c(U, \boldsymbol{\psi}_1(t)) \geqslant 0$$

для всех значений $t \in [t_0, t_1]$ и, следовательно, $\langle\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{\psi}_1(t)\rangle \geqslant 0$ для почти всех $t \in [t_2, t_1]$, откуда получаем, что второе слагаемое в равенстве (12.12) неотрицательно. Следовательно,

$$\int\limits_{t_2}^{t_1}\langle\boldsymbol{u}_1(s), \boldsymbol{\psi}_1(s)\rangle ds = \int\limits_{t_2}^{t_1} c(U, \boldsymbol{\psi}_1(s))ds = 0,$$

откуда в силу условия $0 \in U$ вытекает тождество $c(U, \psi_1(t)) \equiv 0$ на отрезке $[t_2, t_1]$. Поскольку по условиям теоремы начало координат не является вершиной многогранника U, то для каждого $t \in [t_2, t_1]$ найдется ребро многогранника U, на котором скалярное произведение $\langle u, \psi_1(t) \rangle = 0$ и, следовательно, постоянно. Поскольку число ребер многогранника U конечно, то найдется такое ребро w, на котором скалярное произведение $\langle u, \psi_1(t) \rangle$ обращается в нуль для бесконечного числа моментов времени $t \in [t_2, t_1]$. Пусть вектор v имеет направление этого ребра. Тогда в силу аналитичности функции $\psi_1(t)$ на отрезке $[t_2, t_1]$ справедливо тождество $\langle v, \psi_1(t) \rangle \equiv 0$. Точно так же, как и в доказательстве теоремы о конечности числа переключений, продифференцировав последовательно $n-1$ раз это тождество во внутренних точках отрезка $[t_2, t_1]$, в силу условия общности положения получаем противоречие с нетривиальностью сопряженной функции $\psi_1(t)$. Теорема доказана.

12.4. Задача

1. Постройте синтез оптимального управления для задачи быстродействия в начало координат $x = 0$ для объекта, описываемого уравнением

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = u^2, \quad |u^2| \leqslant 1. \end{cases}$$

ДОПОЛНЕНИЯ

Д1. Выпуклая оболочка множества

Множество $F \subset E^n$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in F$ отрезок, соединяющий эти точки, содержится в множестве F, или, что то же самое, если для любого числа $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ выполняется условие $\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \in F$.

Ясно, что пересечение любого числа выпуклых множеств, если оно непусто, снова будет множеством выпуклым.

Точка $\boldsymbol{x}$ называется *выпуклой комбинацией* точек $\boldsymbol{x}_1, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{x}_m \in E^n$, если существуют числа λ_i, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяющие соотношениям $\lambda_i \geqslant 0$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$ такие, что выполняется равенство

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{x}_m. \tag{Д.1}$$

В этом смысле любая точка отрезка является выпуклой комбинацией двух концов отрезка.

Лемма 1. *Если множество F выпукло, то оно содержит любую выпуклую комбинацию своих точек.*

Доказательство. Выпуклую комбинацию любых своих двух точек выпуклое множество содержит по определению. Достаточно положить $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1 - \lambda$. Предположим по индукции, что множество F содержит выпуклую комбинацию любых m своих точек и $m \geqslant 2$. Возьмем произвольную выпуклую комбинацию

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_{m+1} \boldsymbol{x}_{m+1}, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_{m+1} = 1,$$

$m+1$ точек $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{m+1} \in F$. Если хотя бы одно число λ_i равно нулю, то точка является в действительности выпуклой комбинацией меньшего чем $m+1$ числа точек, т.е. по предположению

$\boldsymbol{x} \in F$. Пусть все $\lambda_i > 0$, тогда $1 - \lambda_1 > 0$. Точка $\boldsymbol{x}$ имеет представление

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_{m+1} \boldsymbol{x}_{m+1} = \\ = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + (1 - \lambda_1) \left[\frac{\lambda_2}{1 - \lambda_1} \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \frac{\lambda_{m+1}}{1 - \lambda_1} \boldsymbol{x}_{m+1} \right].$$

Точка в квадратных скобках принадлежит множеству F как выпуклая комбинация m его точек. После этого точка $\boldsymbol{x}$ принадлежит множеству F как выпуклая комбинация двух его точек. Лемма доказана.

Выпуклой оболочкой $\operatorname{conv} F$ множества $F \subset E^n$ называется наименьшее выпуклое множество, содержащее множество F. Такое множество $\operatorname{conv} F$ существует и совпадает с пересечением всех выпуклых множеств, содержащих множество F. Если множество F выпукло, то $\operatorname{conv} F = F$.

Лемма 2. *Выпуклая оболочка* $\operatorname{conv} F$ *множества* F *совпадает с совокупностью* G *всех выпуклых комбинаций точек из множества* F.

Доказательство. Поскольку $F \subset \operatorname{conv} F$, то согласно лемме 1 выполняется включение $G \subset \operatorname{conv} F$. Если показать теперь, что множество G выпукло, то, учитывая, что $F \subset G$, получим включение $\operatorname{conv} F \subset G$, т.е. будем иметь равенство $\operatorname{conv} F = G$.

Покажем, что множество G выпукло. Для этого возьмем две точки $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G$ и число $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ и покажем, что $\lambda \boldsymbol{x} + (1 - \lambda)\boldsymbol{y} \in G$. Точки $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G$ имеют представление

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_p \boldsymbol{x}_p, \\ \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in F, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_p = 1,$$
$$\boldsymbol{y} = \gamma_1 \boldsymbol{y}_1 + \ldots + \gamma_q \boldsymbol{y}_q, \\ \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_q \in F, \quad \gamma_j \geqslant 0, \quad \gamma_1 + \ldots + \gamma_q = 1.$$

Точка

$$\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} = \lambda\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda\lambda_p \boldsymbol{x}_p + (1-\lambda)\gamma_1 \boldsymbol{y}_1 + \ldots + (1-\lambda)\gamma_q \boldsymbol{y}_q$$

является выпуклой комбинацией точек $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_q \in$ $\in F$, так как выполняются условия $\lambda\lambda_i, (1 - \lambda)\gamma_j \geqslant 0$ и

$$\lambda\lambda_1 + \ldots + \lambda\lambda_p + (1 - \lambda)\gamma_1 + \ldots + (1 - \lambda)\gamma_q = \\ = \lambda(\lambda_1 + \ldots + \lambda_p) + (1 - \lambda)(\gamma_1 + \ldots + \gamma_q) = \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

Следовательно, $\lambda \boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y} \in G$ и множество G выпукло. Лемма доказана.

Мы показали, что выпуклая оболочка $\operatorname{conv} F$ множества F совпадает с совокупностью всех выпуклых комбинаций точек из множества $F \subset E^n$. Таким образом, любая точка $\boldsymbol{x} \in \operatorname{conv} F$ представима в виде выпуклой комбинации (Д.1), состоящей из некоторого конечного числа m точек. Оказывается, эти точки всегда можно выбрать в количестве не более чем $n+1$.

Теорема Каратеодори. *Пусть $F \subset E^n$. Любая точка $\boldsymbol{x} \in \operatorname{conv} F$ представима в виде выпуклой комбинации не более чем $n+1$ точек из множества F, где n — размерность пространства E^n.*

Доказательство. Пусть точка $\boldsymbol{x} \in \operatorname{conv} F$ представима в виде

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{x}_m,$$

где $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m \in F$ и $\lambda_i \geqslant 0$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$. Покажем, что если $m > n+1$, то число слагаемых в этом представлении можно уменьшить хотя бы на единицу. Предположим, что $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, в противном случае число слагаемых в представлении меньше m.

Относительно чисел γ_i рассмотрим линейную алгебраическую систему из $n+1$ уравнений с m неизвестными

$$\gamma_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \gamma_m \boldsymbol{x}_m = 0, \tag{Д.2}$$

$$\gamma_1 + \ldots + \gamma_m = 0. \tag{Д.3}$$

Поскольку $m > n+1$, у этой системы существует нетривиальное решение $\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_m$. Так как $\bar{\gamma}_1 + \ldots + \bar{\gamma}_m = 0$, то среди чисел $\bar{\gamma}_i$ найдется хотя бы одно положительное число. Выберем из чисел $\frac{\bar{\gamma}_i}{\lambda_i}$ максимальное. Оно тоже положительное. Для определенности пусть максимальным будет число $\frac{\bar{\gamma}_m}{\lambda_m}$. Тогда

$$\frac{\bar{\gamma}_m}{\lambda_m} \geqslant \frac{\bar{\gamma}_i}{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{Д.4}$$

Так как $\lambda_m > 0$ и $\frac{\bar{\gamma}_m}{\lambda_m} > 0$, то, следовательно, $\bar{\gamma}_m > 0$.

Согласно равенству (Д.2) имеем

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{x}_m =$$

$$= \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{x}_m - \frac{\lambda_m}{\bar{\gamma}_m}\Big(\bar{\gamma}_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \bar{\gamma}_m \boldsymbol{x}_m\Big) =$$
$$= \Big(\lambda_1 - \frac{\lambda_m}{\bar{\gamma}_m}\bar{\gamma}_1\Big)\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \Big(\lambda_{m-1} - \frac{\lambda_m}{\bar{\gamma}_m}\bar{\gamma}_{m-1}\Big)\boldsymbol{x}_{m-1}.$$

Это представление содержит уже $m-1$ точек, а именно, $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{m-1}$ и образует выпуклую комбинацию, поскольку по формулам (Д.3) и (Д.4) имеем соотношения

$$\lambda_i - \frac{\lambda_m}{\bar{\gamma}_m}\bar{\gamma}_i = \frac{\lambda_i \lambda_m}{\bar{\gamma}_m}\left(\frac{\bar{\gamma}_m}{\lambda_m} - \frac{\bar{\gamma}_i}{\lambda_i}\right) \geqslant 0,$$
$$\lambda_1 - \frac{\lambda_m}{\bar{\gamma}_m}\bar{\gamma}_1 + \ldots + \lambda_{m-1} - \frac{\lambda_m}{\bar{\gamma}_m}\bar{\gamma}_{m-1} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1.$$

Таким образом, доказано, что любая точка $\boldsymbol{x} \in \operatorname{conv} F$ представима в виде выпуклой комбинации не более чем $n+1$ точек из множества F, т.е. выпуклая оболочка $\operatorname{conv} F$ множества F совпадает с совокупностью всех точек вида

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1}, \quad \boldsymbol{x}_i \in F, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1.$$

Теорема доказана.

Д2. Отделимость множеств

Два множества F и G из пространства E^n называются *отделимыми*, если существует такая гиперплоскость Γ в пространстве E^n, что множество F содержится в одном замкнутом полупространстве, определяемом этой гиперплоскостью, а множество G содержится в другом замкнутом полупространстве (рис. Д1). Произвольная гиперплоскость Γ в пространстве E^n задается уравнением

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\psi} \rangle = \alpha,$$

где $\boldsymbol{\psi}$ — некоторый фиксированный вектор единичной длины, α — некоторое число. Вектор $\boldsymbol{\psi}$ ортогонален гиперплоскости Γ. Если теперь множества $F, G \subset E^n$ отделимы и гиперплоскость Γ отделяет множества F и G, то будем для определенности считать, что

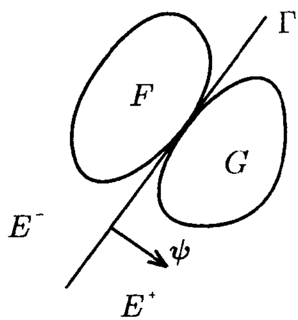


Рис. Д1

направление вектора ψ выбрано таким образом, что множество F содержится в отрицательном полупространстве относительно вектора ψ, а множество G — в положительном. (В противном случае заменим вектор ψ на $-\psi$.)

В этом случае для любого вектора $\boldsymbol{f} \in F$ выполняется неравенство $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant \alpha$, а для любого вектора $\boldsymbol{g} \in G$ — неравенство $\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi} \rangle \geqslant \alpha$. Вычитая одно неравенство из другого, получаем соотношение

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle - \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant 0. \tag{Д.5}$$

Таким образом, если множества F и G отделимы, то существует вектор $\boldsymbol{\psi} \in S$ такой, что для любых векторов $\boldsymbol{f} \in F$, $\boldsymbol{g} \in G$ выполняется неравенство (Д.5).

Пусть теперь неравенство (Д.5) выполнено для любых векторов $\boldsymbol{f} \in F$, $\boldsymbol{g} \in G$. Тогда имеем соотношение

$$\sup_{\boldsymbol{f} \in F} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant \inf_{\boldsymbol{g} \in G} \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi} \rangle.$$

Положим для определенности, что

$$\alpha = \sup_{\boldsymbol{f} \in F} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle.$$

Тогда для любого вектора $\boldsymbol{f} \in F$ выполняется неравенство $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant \alpha$ и для любого вектора $\boldsymbol{g} \in G$ — неравенство $\alpha \leqslant \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi} \rangle$, т.е. гиперплоскость $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\psi} \rangle = \alpha$ отделяет множества F и G.

Таким образом, множества F и G отделимы тогда и только тогда, когда существует вектор $\boldsymbol{\psi} \in S$ такой, что для любых векторов $\boldsymbol{f} \in F$, $\boldsymbol{g} \in G$ выполняется соотношение (Д.5).

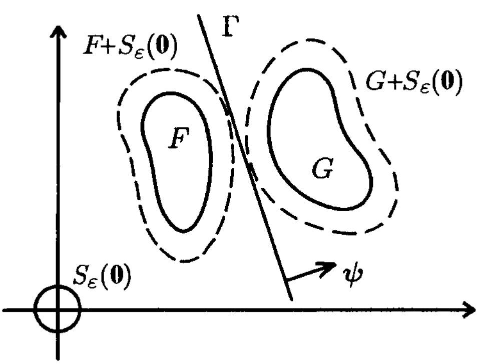


Рис. Д2

Будем говорить, что множества $F, G \subset E^n$ *строго отделимы*, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что множества $F' = F + S_\varepsilon(\mathbf{0})$ и $G' = G + S_\varepsilon(\mathbf{0})$ отделимы (рис. Д2). Из этого определения и соотношения (Д.5) сразу следует, что множества F и G строго отделимы тогда и только тогда, когда существуют число $\varepsilon > 0$ и вектор $\boldsymbol{\psi} \in S$ такие, что неравенство

$$\langle \boldsymbol{f}', \boldsymbol{\psi} \rangle - \langle \boldsymbol{g}', \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant 0$$

выполняется для любых векторов

$$\boldsymbol{f}' \in F + S_\varepsilon(\boldsymbol{0}), \qquad \boldsymbol{g}' \in G + S_\varepsilon(\boldsymbol{0}).$$

Так как по определению суммы множеств векторы $\boldsymbol{f}'$ и $\boldsymbol{g}'$ представимы в виде

$$\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{g}' = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{f} \in F, \quad \boldsymbol{g} \in G, \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S_\varepsilon(\boldsymbol{0}),$$

то выполнение полученного неравенства эквивалентно выполнению неравенства

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle - \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi} \rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\psi} \rangle - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant 0 \tag{Д.6}$$

для любых векторов

$$\boldsymbol{f} \in F, \qquad \boldsymbol{g} \in G, \qquad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S_\varepsilon(\boldsymbol{0}).$$

Покажем, что выполнение этого неравенства в свою очередь эквивалентно выполнению неравенства

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle - \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi} \rangle + 2\varepsilon \leqslant 0 \tag{Д.7}$$

для любых векторов $\boldsymbol{f} \in F$, $\boldsymbol{g} \in G$.

Действительно, пусть неравенство (Д.6) выполняется для любых векторов

$$\boldsymbol{f} \in F, \qquad \boldsymbol{g} \in G, \qquad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S_\varepsilon(\boldsymbol{0}).$$

Положим $\boldsymbol{u} = \varepsilon\boldsymbol{\psi}$ и $\boldsymbol{v} = -\varepsilon\boldsymbol{\psi}$. Тогда

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\psi} \rangle - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi} \rangle = \varepsilon\|\boldsymbol{\psi}\| + \varepsilon\|\boldsymbol{\psi}\| = 2\varepsilon$$

и из соотношения (Д.6) следует неравенство (Д.7).

Для любых векторов $\boldsymbol{u} \in S_\varepsilon(\boldsymbol{0})$, $-\boldsymbol{v} \in S_\varepsilon(\boldsymbol{0})$ и $\boldsymbol{\psi} \in S$ имеем

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{\psi}\| \leqslant \varepsilon, \qquad \langle -\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant \|-\boldsymbol{v}\| \cdot \|\boldsymbol{\psi}\| \leqslant \varepsilon,$$

следовательно, $-2\varepsilon \leqslant -\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\psi} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi} \rangle$. Пусть теперь выполняется неравенство (Д.7). Тогда, учитывая последнее неравенство, приходим к соотношению

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle - \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant -2\varepsilon \leqslant -\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\psi} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi} \rangle,$$

т.е. получаем неравенство (Д.6).

Итак, доказано, что множества $F, G \subset E^n$ строго отделимы тогда и только тогда, когда существуют число $\varepsilon > 0$ и вектор $\boldsymbol{\psi} \in S$ такие, что неравенство (Д.7) выполняется для любых векторов $\boldsymbol{f} \in F$, $\boldsymbol{g} \in G$. Заметим, что из строгой отделимости двух множеств следует их отделимость.

Пусть множества F и G непустые и компактные, т.е. $F, G \in \in \Omega(E^n)$. В этом случае из соотношения (Д.5) получаем

$$c(F, \boldsymbol{\psi}) + c(G, -\boldsymbol{\psi}) = \max_{\boldsymbol{f} \in F} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle + \max_{\boldsymbol{g} \in G} \langle \boldsymbol{g}, -\boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant 0.$$

Это означает, что множества $F, G \in \Omega(E^n)$ отделимы тогда и только тогда, когда существует вектор $\boldsymbol{\psi} \in S$ такой, что выполняется неравенство

$$c(F, \boldsymbol{\psi}) + c(G, -\boldsymbol{\psi}) \leqslant 0. \tag{Д.8}$$

Аналогично из неравенства (Д.7) следует, что

$$c(F, \boldsymbol{\psi}) + c(G, -\boldsymbol{\psi}) + 2\varepsilon = \max_{\boldsymbol{f} \in F} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle + \max_{\boldsymbol{g} \in G} \langle \boldsymbol{g}, -\boldsymbol{\psi} \rangle + 2\varepsilon \leqslant 0,$$

т.е. множества $F, G \in \Omega(E^n)$ строго отделимы тогда и только тогда, когда существуют число $\varepsilon > 0$ и вектор $\boldsymbol{\psi} \in S$ такие, что выполняется неравенство

$$c(F, \boldsymbol{\psi}) + c(G, -\boldsymbol{\psi}) + 2\varepsilon \leqslant 0. \tag{Д.9}$$

Докажем две леммы об отделимости и строгой отделимости точки от множества.

Лемма о строгой отделимости. *Пусть множество $F \subset \subset E^n$ замкнуто и выпукло, а точка $\boldsymbol{g} \in E^n$ не принадлежит множеству F. Тогда множества F и $\{\boldsymbol{g}\}$ строго отделимы.*

Доказательство. Пусть F — замкнутое выпуклое множество и $\boldsymbol{g} \notin F$. Определим расстояние $\rho(\boldsymbol{g}, F)$ от точки $\boldsymbol{g}$ до множества F формулой

$$\rho(\boldsymbol{g}, F) = \min_{\boldsymbol{f} \in F} \|\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}\|.$$

Норма $\|\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}\|$ есть функция непрерывная, а множество F замкнуто. Следовательно, минимум функции $\|\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}\|$ достигается на некотором векторе $\boldsymbol{f}_0 \in F$ (рис. Д3). Так как $\boldsymbol{g} \notin F$, имеем

$$\rho(\boldsymbol{g}, F) = \|\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}_0\| > 0. \tag{Д.10}$$

Более того, для любого вектора $\boldsymbol{f} \in F$ выполняется неравенство

$$\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\| \geqslant \|\boldsymbol{f}_0-\boldsymbol{g}\|. \qquad (Д.11)$$

Зафиксируем некоторый вектор $\boldsymbol{f} \in F$ и соединим его отрезком с точкой $\boldsymbol{f}_0$. Произвольную точку этого отрезка запишем в виде

$$\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{f}+(1-\lambda)\boldsymbol{f}_0 = \boldsymbol{f}_0+\lambda(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_0),$$

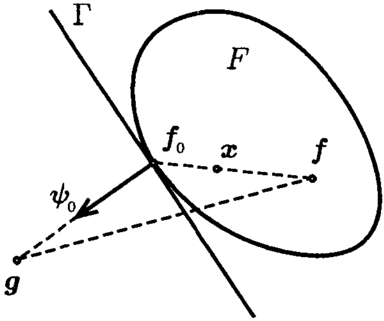


Рис. Д3

где число λ выбираем из отрезка $[0,1]$. Так как множество F выпукло, то $\boldsymbol{x} \in F$ для всех $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Применяя к точке $\boldsymbol{x} \in F$ соотношение (Д.11), получаем неравенство

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{g}\| \geqslant \|\boldsymbol{f}_0-\boldsymbol{g}\|,$$

следовательно,

$$\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{g}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{g}\rangle = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{g}\|^2 \geqslant \|\boldsymbol{f}_0-\boldsymbol{g}\|^2.$$

Подставляя вместо $\boldsymbol{x}$ его выражение через λ, имеем

$$\langle \boldsymbol{f}_0+\lambda(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_0)-\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{f}_0+\lambda(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_0)-\boldsymbol{g}\rangle \geqslant \|\boldsymbol{f}_0-\boldsymbol{g}\|^2,$$

т.е. для всех $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ выполняется неравенство

$$\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_0\|^2\lambda^2 + 2\langle \boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_0-\boldsymbol{g}\rangle\lambda \geqslant 0.$$

Обозначим левую часть этого неравенства через $\varphi(\lambda)$. Тогда $\varphi(\lambda) \geqslant 0$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ и $\varphi(0) = 0$. Следовательно, $\varphi'(0) \geqslant 0$, т.е. $\langle \boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_0-\boldsymbol{g}\rangle \geqslant 0$. Поскольку вектор $\boldsymbol{f} \in F$ был выбран произвольно, неравенство

$$\langle \boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_0-\boldsymbol{g}\rangle \geqslant 0 \qquad (Д.12)$$

выполняется для любого вектора $\boldsymbol{f} \in F$.

Так как по условию (Д.10) $\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}_0\| \neq 0$, то рассмотрим вектор $\boldsymbol{\psi}_0 = \frac{\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}_0}{\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}_0\|}$. Проверим для этого вектора $\boldsymbol{\psi}_0$ соотношение (Д.7). Учитывая неравенство (Д.12), получим

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_0\rangle - \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi}_0\rangle = \frac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}_0\rangle - \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}_0\rangle}{\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}_0\|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\langle \boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}_0\rangle}{\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}_0\|} - \frac{\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}_0\rangle}{\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}_0\|} = -\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}_0\|.$$

Если положить $2\varepsilon = \|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}_0\| > 0$, то неравенство (Д.7) будет выполняться для любого вектора $\boldsymbol{f} \in F$. Следовательно, множества F и $\{\boldsymbol{g}\}$ строго отделимы и лемма доказана.

Следствие. *Пусть множество $F \in \Omega(E^n)$ выпукло, а точка $\boldsymbol{g} \in E^n$ не принадлежит множеству F. Тогда существует вектор $\boldsymbol{\psi} \in S$ такой, что выполняется строгое неравенство*

$$c(F, \boldsymbol{\psi}) < \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi}\rangle. \tag{Д.13}$$

Доказательство. В силу леммы множества F и $G = \{\boldsymbol{g}\}$ строго отделимы и, следовательно, существуют число $\varepsilon > 0$ и вектор $\boldsymbol{\psi} \in S$ такие, что выполняется неравенство (Д.10), т.е.

$$c(F, \boldsymbol{\psi}) + \langle \boldsymbol{g}, -\boldsymbol{\psi}\rangle + 2\varepsilon \leqslant 0.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$, из этого неравенства следует неравенство (Д.13) и следствие доказано.

На рис. Д3 ясно виден геометрический смысл неравенства (Д.13).

Лемма об отделимости. *Пусть множество $F \subset E^n$ замкнуто и выпукло, а точка $\boldsymbol{g} \in E^n$ не принадлежит внутренности множества F. Тогда множества F и $\{\boldsymbol{g}\}$ отделимы.*

Доказательство. Поскольку $\boldsymbol{g} \notin \operatorname{int} F$, существует такая последовательность точек $\{\boldsymbol{g}_k\}$, не принадлежащих множеству F, которая сходится к точке $\boldsymbol{g}$. Согласно лемме о строгой отделимости каждая точка $\boldsymbol{g}_k$ строго отделима от множества F, следовательно, просто отделима. Тогда существует вектор $\boldsymbol{\psi}_k \in S$ такой, что для любого вектора $\boldsymbol{f} \in F$ выполняется неравенство (Д.5), т.е.

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_k\rangle - \langle \boldsymbol{g}_k, \boldsymbol{\psi}_k\rangle \leqslant 0. \tag{Д.14}$$

Поскольку единичная сфера S есть множество компактное, из последовательности $\{\boldsymbol{\psi}_k\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $\boldsymbol{\psi} \in S$. Обозначим эту подпоследовательность снова через $\{\psi_k\}$. Тогда для любого вектора $\boldsymbol{f} \in F$, используя предельный переход в неравенстве (Д.14), получаем

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle - \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant 0,$$

т.е. для вектора $\boldsymbol{\psi}$ выполняется соотношение (Д.5). Следовательно, множества F и $\{\boldsymbol{g}\}$ отделимы и лемма доказана.

Следствие. *Пусть множество $F \in \Omega(E^n)$ выпукло и точка $\boldsymbol{f}_0$ принадлежит границе множества F, т.е. $\boldsymbol{f}_0 \in \partial F$. Тогда существует вектор $\boldsymbol{\psi}_0 \in S$, который является опорным к множеству F в точке $\boldsymbol{f}_0$ (см. рис. Д3).*

Доказательство. Поскольку точка $\boldsymbol{f}_0$ не принадлежит внутренности множества F, по лемме об отделимости множества F и $G = \{\boldsymbol{f}_0\}$ отделимы. Следовательно, существует вектор $\boldsymbol{\psi}_0 \in S$ такой, что выполняется неравенство (Д.8), т.е.

$$c(F, \boldsymbol{\psi}_0) + \langle \boldsymbol{f}_0, -\boldsymbol{\psi}_0 \rangle \leqslant 0.$$

Согласно следствию из свойства 6 опорных функций (см. лекцию 3), из включения $\boldsymbol{f}_0 \in F$ следует неравенство

$$\langle \boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant c(F, \boldsymbol{\psi}_0).$$

Из двух последних неравенств вытекает равенство

$$c(F, \boldsymbol{\psi}_0) = \langle \boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{\psi}_0 \rangle.$$

Таким образом, вектор $\boldsymbol{\psi}_0$ является опорным к множеству F в точке $\boldsymbol{f}_0$.

Теорема о строгой отделимости. *Два выпуклых множества $F, G \in \Omega(E^n)$ строго отделимы тогда и только тогда, когда они не пересекаются, т.е. когда $F \cap G = \emptyset$.*

Доказательство. Два множества $F, G \in \Omega(E^n)$ строго отделимы тогда и только тогда, когда существуют число $\varepsilon > 0$ и вектор $\boldsymbol{\psi} \in S$ такие, что выполняется неравенство (Д.9), т.е. для этого вектора $\boldsymbol{\psi} \in S$ выполняется неравенство

$$c(F, \boldsymbol{\psi}) + c(G, -\boldsymbol{\psi}) < 0.$$

Согласно свойству 12 опорных функций (см. лекцию 3) два выпуклых множества $F, G \in \Omega(E^n)$ пересекаются тогда и только тогда, когда для всех векторов $\boldsymbol{\psi} \in S$ выполняется неравенство

$$c(F, \boldsymbol{\psi}) + c(G, -\boldsymbol{\psi}) \geqslant 0.$$

Отсюда сразу следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теорема об отделимости. *Два выпуклых множества $F, G \in \Omega(E^n)$ отделимы тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{0} \notin \operatorname{int}[F + (-1)G]. \qquad (Д.15)$$

Доказательство. Два множества $F, G \in \Omega(E^n)$ отделимы тогда и только тогда, когда существует вектор $\boldsymbol{\psi} \in S$ такой, что выполняется неравенство (Д.8).

С другой стороны, множество $F + (-1)G$ выпукло, и согласно следствию из свойства 14 опорных функций (см. лекцию 3) соотношение (Д.15) выполняется тогда и только тогда, когда

$$0 < c(F, \boldsymbol{\psi}) + c(G, -\boldsymbol{\psi})$$

для любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in S$. Отсюда сразу следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Заметим, что если внутренность множества $F + (-1)G$ пуста, то выпуклые множества $F, G \in \Omega(E^n)$ всегда отделимы.

Д3. Выпуклые функции

Функция $f : E^n \to E^1$ называется *выпуклой* (см. лекцию 3), если для любых двух точек $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in E^n$ и любого числа $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ выполняется неравенство

$$f(\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1 - \lambda)\boldsymbol{x}_2) \leqslant \lambda f(\boldsymbol{x}_1) + (1 - \lambda) f(\boldsymbol{x}_2). \qquad (Д.16)$$

По индукции легко показать, что для любой выпуклой комбинации

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{x}_m, \quad \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m \in E^n, \quad \lambda_i \geqslant 0, \\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$$

выпуклая функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству

$$f(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{x}_m) \leqslant \lambda_1 f(\boldsymbol{x}_1) + \ldots + \lambda_m f(\boldsymbol{x}_m). \qquad (Д.17)$$

Читателю предлагается сделать это самостоятельно.

Примеры выпуклых функций были рассмотрены в лекции 3. Именно, для любого множества $F \in \Omega(E^n)$ его опорная функция $c(F, \boldsymbol{\psi})$ является функцией, выпуклой по аргументу $\boldsymbol{\psi} \in E^n$ (следствие из свойств 1 и 2). В лекции 3 показано, что опорная функция $c(F, \psi)$ для множества $F \in \Omega(E^n)$ является функцией, непрерывной по ψ (следствие из свойства 13). Оказывается, любая выпуклая функция, если она принимает конечные значения, т.е. $f(\boldsymbol{x}) \neq \infty$, является функцией непрерывной.

Теорема 1. *Если функция $f : E^n \to E^1$ выпукла и конечна, то она непрерывна.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $\boldsymbol{x}_0 \in \in E^n$ и рассмотрим близкую к ней точку $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\Delta x}$. Рассмотрим базисные векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в пространстве E^n и противоположные им векторы $\boldsymbol{e}_{n+1} = -\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2n} = -\boldsymbol{e}_n$. Вектор приращения аргумента $\boldsymbol{\Delta x} = (\Delta x^1, \ldots, \Delta x^n)$ разложим по векторам $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2n}$, т.е. представим в виде

$$\boldsymbol{\Delta x} = \xi_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \xi_{2n} \boldsymbol{e}_{2n} \tag{Д.18}$$

следующим образом: если $\Delta x^i \geqslant 0$, то положим $\xi_i = \Delta x^i$, $\xi_{n+i} = 0$, если $\Delta x^i < 0$, то положим $\xi_i = 0$, $\xi_{n+i} = -\Delta x^i$. Таким образом, в этом представлении все числа ξ_i неотрицательны, т.е. $\xi_i \geqslant 0$ и $\xi_i \leqslant \|\boldsymbol{\Delta x}\|$. Будем считать, что вектор $\boldsymbol{\Delta x}$ достаточно мал, так что $\xi_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, 2n$. Согласно формулам (Д.17) и (Д.16) имеем

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\Delta x}) = f\left(\boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=1}^{2n} \xi_i \boldsymbol{e}_i\right) = f\left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\boldsymbol{x}_0 + \xi_i\, 2n \boldsymbol{e}_i)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} f(\boldsymbol{x}_0 + \xi_i\, 2n\boldsymbol{e}_i) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} f[(1-\xi_i)\boldsymbol{x}_0 + \xi_i(\boldsymbol{x}_0 + 2n\boldsymbol{e}_i)] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} [(1-\xi_i) f(\boldsymbol{x}_0) + \xi_i f(\boldsymbol{x}_0 + 2n\boldsymbol{e}_i)].$$

Оценим теперь приращение функции. Используя полученное неравенство, получаем

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\Delta x}) - f(\boldsymbol{x}_0) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} [(1-\xi_i) f(\boldsymbol{x}_0) + \xi_i f(\boldsymbol{x}_0 + 2n\boldsymbol{e}_i)] - f(\boldsymbol{x}_0) =$$
$$= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \xi_i [f(\boldsymbol{x}_0 + 2n\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x}_0)].$$

Поскольку функция $f(\boldsymbol{x}) \neq \infty$, то все выражения в квадратных скобках есть некоторые числа, поэтому правая часть этого неравенства стремится к нулю, когда $\boldsymbol{\Delta x} \to 0$. Следовательно, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любого приращения $\boldsymbol{\Delta x} \in E^n$ выполняется неравенство

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\Delta x}) - f(\boldsymbol{x}_0) \leqslant \varepsilon, \tag{Д.19}$$

как только $\|\boldsymbol{\Delta x}\| < \delta$. Пусть $\|\boldsymbol{\Delta x}\| < \delta$. Используя снова формулу (Д.16), получим

$$f(\boldsymbol{x}_0) = f\left(\frac{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\Delta x}}{2} + \frac{\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{\Delta x}}{2}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\Delta x}) + \frac{1}{2} f(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{\Delta x}),$$

т.е. $f(\boldsymbol{x}_0) - f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\Delta x}) < f(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{\Delta x}) - f(\boldsymbol{x}_0)$. Правая часть этого неравенства меньше ε в силу формулы (Д.19), так как $\|-\boldsymbol{\Delta x}\| \leqslant \delta$, поэтому $f(\boldsymbol{x}_0) - f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\Delta x}) \leqslant \varepsilon$. Сравнивая полученное неравенство с формулой (Д.19), получаем соотношение

$$|f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\Delta x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| \leqslant \varepsilon$$

при достаточно малых приращениях $\boldsymbol{\Delta x}$.

Таким образом, функция $f(\boldsymbol{x})$ непрерывна в точке $\boldsymbol{x}_0$ и теорема 1 доказана.

Рассмотрим вновь произвольную функцию $f : E^n \to E^1$ и некоторый вектор $\boldsymbol{h} \in E^n$. *Производной* $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{h})$ *от функции* $f(\boldsymbol{x})$ *в точке* $\boldsymbol{x}$ *по направлению* $\boldsymbol{h}$ называется предел функции

$$\varphi(\alpha) = \frac{f(\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})}{\alpha}$$

при положительных α, стремящихся к нулю, если, конечно, он существует. Таким образом,

$$f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{h}) = \lim_{\alpha \to +0} \varphi(\alpha) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})}{\alpha}. \tag{Д.20}$$

Теорема 2. *Если функция* $f : E^n \to E^1$ *выпукла и конечна, то в любой точке* $\boldsymbol{x} \in E^n$ *и для любого направления* $\boldsymbol{h} \in E^n$ *функция* $\varphi(\alpha) = \frac{f(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})}{\alpha}$ *не возрастает при* $\alpha \to +0$ *и* *ограничена снизу. Таким образом, в любой точке* $\boldsymbol{x} \in E^n$ *производная* $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{h})$ *по любому направлению* $\boldsymbol{h} \in E^n$ *существует. Более того, производная по направлению удовлетворяет следующим свойствам:*

1) $f'(\boldsymbol{x}; \lambda\boldsymbol{h}) = \lambda f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{h}) \quad \forall \lambda \geqslant 0$;

2) $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2) \leqslant f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{h}_1) + f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{h}_2) \quad \forall \boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2 \in E^n$.

Доказательство. Зафиксируем векторы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h} \in E^n$. Если мы покажем, что функция $\varphi(\alpha)$ при $\alpha \to 0$ не возрастает и ограничена снизу, то предел в соотношении (Д.20) будет существовать и будет конечен, т.е. мы докажем тогда, что производная $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{h})$ существует.

Пусть числа α_1, α_2 таковы, что $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$. Положим в формуле (Д.16) $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $1 - \lambda = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1}$ и $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x} + \alpha_1\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}$, при этом получим $\lambda\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x} + \alpha_2\boldsymbol{h}$ и

$$f(\boldsymbol{x} + \alpha_2\boldsymbol{h}) \leqslant \frac{\alpha_2}{\alpha_1} f(\boldsymbol{x} + \alpha_1\boldsymbol{h}) + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} f(\boldsymbol{x}).$$

Следовательно,

$$\frac{f(\boldsymbol{x} + \alpha_2\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})}{\alpha_2} \leqslant \frac{1}{\alpha_1} f(\boldsymbol{x} + \alpha_1\boldsymbol{h}) + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1\alpha_2} f(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{\alpha_2} f(\boldsymbol{x}) = \\ = \frac{f(\boldsymbol{x} + \alpha_1\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})}{\alpha_1},$$

т.е. $\varphi(\alpha_2) \leqslant \varphi(\alpha_1)$ и функция $\varphi(\alpha)$ не возрастает при $\alpha \to +0$.

Положив в формуле (Д.16) $\lambda = \frac{1}{1+\alpha}$, $1 - \lambda = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ и $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{h}$, получим $\lambda\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}$ и

$$f(\boldsymbol{x}) \leqslant \frac{1}{1+\alpha} f(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{h}) + \frac{\alpha}{1+\alpha} f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h}).$$

Следовательно,

$$\frac{f(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})}{\alpha} \geqslant \frac{(1+\alpha) f(\boldsymbol{x}) - \alpha f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})}{\alpha} = \\ = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h}).$$

Поскольку функция $f(\boldsymbol{x}) \neq 0$, то правая часть этого неравенства есть конечное число, следовательно, функция $\varphi(\alpha)$ ограничена снизу.

Мы доказали, что предел (Д.20) существует и конечен, т.е. функция $f(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}$ дифференцируема по направлению $\boldsymbol{h}$. Свойство 1 сразу следует из соотношения (Д.20). Действительно, пусть $\lambda > 0$ (при $\lambda = 0$ свойство 1, очевидно, выполняется), тогда

$$f'(\boldsymbol{x}; \lambda \boldsymbol{h}) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(\boldsymbol{x} + \alpha\lambda \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})}{\alpha} = \\ = \lambda \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(\boldsymbol{x} + \alpha\lambda \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})}{\alpha\lambda} = \lambda f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{h}).$$

Для доказательства свойства 2 снова воспользуемся формулами (Д.16) и (Д.20). Пусть $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2 \in E^n$, тогда имеем соотношения

$$f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(\boldsymbol{x} + \alpha(\boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2)) - f(\boldsymbol{x})}{\alpha} = \\ = \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(\frac{\boldsymbol{x}+2\alpha \boldsymbol{h}_1}{2} + \frac{\boldsymbol{x}+2\alpha \boldsymbol{h}_2}{2}) - f(\boldsymbol{x})}{\alpha} \leqslant \\ \leqslant \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(\boldsymbol{x} + 2\alpha \boldsymbol{h}_1) - f(\boldsymbol{x})}{2\alpha} + \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(\boldsymbol{x} + 2\alpha \boldsymbol{h}_2) - f(\boldsymbol{x})}{2\alpha} = \\ = f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{h}_1) + f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{h}_2).$$

Теорема полностью доказана.

Следствие. *Для любого множества $F \in \Omega(E^n)$ его опорная функция $c(F, \boldsymbol{\psi})$ выпукла и конечна. Следовательно, функция*

$$\varphi(\alpha) = \frac{c(F, \boldsymbol{\psi}_0 + \alpha\boldsymbol{\psi}) - c(F, \boldsymbol{\psi}_0)}{\alpha} \tag{Д.21}$$

не возрастает при $\alpha \to +0$ и ограничена снизу для любых $\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi} \in E^n$. Таким образом, опорная функция $c(F, \boldsymbol{\psi})$ дифференцируема в любой точке $\boldsymbol{\psi}_0 \in E^n$ по любому направлению $\boldsymbol{\psi} \in E^n$ и производная $c'(F, \boldsymbol{\psi}_0; \boldsymbol{\psi})$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) $c'(F, \boldsymbol{\psi}_0; \lambda\boldsymbol{\psi}) = \lambda c'(F, \boldsymbol{\psi}_0; \boldsymbol{\psi}) \quad \forall \lambda \geqslant 0$;
2) $c'(F, \boldsymbol{\psi}_0; \boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\psi}_2) \leqslant c'(F, \boldsymbol{\psi}_0; \boldsymbol{\psi}_1) + c'(F, \boldsymbol{\psi}_0; \boldsymbol{\psi}_2) \; \forall \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2 \in E^n$.

Функция $f : E^n \to E^1$ называется *дифференцируемой* в точке $\boldsymbol{x}_0 \in E^n$, если существует такой вектор $\boldsymbol{p} \in E^n$, что для любого вектора $\boldsymbol{x} \in E^n$ выполняется соотношение

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle + \bar{o}(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|), \tag{Д.22}$$

где величина $\bar{o}(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|)$ такова, что $\frac{\bar{o}(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|} \to 0$ при $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \to 0$. Вектор $\boldsymbol{p}$ в этом случае называется *градиентом* функции $f(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}_0$ и обозначается через $\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{x}}$.

Если функция дифференцируема, то ее производная по любому направлению $\boldsymbol{h}$ существует и имеет вид

$$f'(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{h}) = \left\langle \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{h} \right\rangle. \tag{Д.23}$$

Действительно, в силу соотношения (Д.22) имеем

$$f'(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{h}) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + \alpha \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{\alpha} =$$
$$= \lim_{\alpha \to +0} \frac{\left\langle \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{x}}, \alpha \boldsymbol{h} \right\rangle + \bar{o}(\|\alpha \boldsymbol{h}\|)}{\alpha} = \left\langle \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{h} \right\rangle.$$

Пример 1. Найдем производную по направлению от функции $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$. Эта функция выпукла и конечна. Следовательно, согласно теореме 2 ее производная по любому направлению существует в любой точке. Известно, что эта функция $\|\boldsymbol{x}\|$ дифференцируема всюду, кроме точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ и $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$. Поэтому при $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ее производная по направлению существует и в силу формулы (Д.23) имеет вид

$$f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{h}) = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{h} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\|}.$$

При $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ из определения производной по направлению (см. формулу (Д.20)) имеем

$$f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{h}) = \frac{\|\alpha \boldsymbol{h}\|}{\alpha} = \|\boldsymbol{h}\|.$$

Если функция $f : E^n \to E^1$ выпукла и дифференцируема в точке $\boldsymbol{x}_0$, то для любого вектора $\boldsymbol{x} \in E^n$ выполняется неравенство

$$\left\langle \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \right\rangle \leqslant f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0). \tag{Д.24}$$

Действительно, пусть $0 < \lambda < 1$. Положив в формуле (Д.16) $\lambda = \alpha$, $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_0$, имеем

$$f(\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{x}_0) \leqslant \alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x}_0)+\alpha[f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)].$$

Следовательно,

$$\frac{f(\boldsymbol{x}_0 + \alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)) - f(\boldsymbol{x}_0)}{\alpha} \leqslant f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0).$$

Переходя к пределу при $\alpha \to +0$ в левой части этого неравенства, получим в силу дифференцируемости по направлению функции $f(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}_0$ неравенство

$$f'(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \leqslant f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0),$$

откуда согласно формуле (Д.23) получаем неравенство (Д.24).

Пусть теперь функция $f : E^n \to E^1$ просто выпукла. Вектор $\boldsymbol{p} \in E^n$ назовем *субградиентом* функции $f(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}_0$, если для любого вектора $\boldsymbol{x} \in E^n$ выполняется неравенство

$$\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle \leqslant f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) \tag{Д.25}$$

(сравните с формулой (Д.24)). Совокупность всех таких векторов $\boldsymbol{p} \in E^n$ назовем субдифференциалом функции $f(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}_0$ и обозначим $\partial f(\boldsymbol{x}_0)$. Таким образом,

$$\partial f(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{p} : \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle \leqslant f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) \ \ \forall \boldsymbol{x} \in E^n\}.$$

Далее, функцию $f(\boldsymbol{x})$ назовем *субдифференцируемой* в точке $\boldsymbol{x}_0$, если у нее в этой точке существует хотя бы один субградиент, т.е. множество $\partial f(\boldsymbol{x}_0)$ непусто. Из формулы (Д.24) следует, что если выпуклая функция $f(\boldsymbol{x})$ дифференцируема в точке $\boldsymbol{x}_0 \in E^n$, то она субдифференцируема в этой точке и ее градиент $\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{x}}$ является субградиентом, т.е. $\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{x}} \in \partial f(\boldsymbol{x}_0)$. В разделе Д4 будет показано, что в этом случае других субградиентов у функции $f(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}_0$ больше нет, т.е. в этом случае $\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{x}} = \partial f(\boldsymbol{x}_0)$.

Пример 2. Найдем субдифференциал функции $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$ в точке $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$. Неравенство (Д.25) при этом принимает вид

$$\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle \leqslant \|\boldsymbol{x}\|$$

и должно выполняться для любого вектора $\boldsymbol{x} \in E^n$. Ясно, что для любого вектора $\boldsymbol{p}$ такого, что $\|\boldsymbol{p}\| \leqslant 1$, это неравенство выполняется при всех $\boldsymbol{x} \in E^n$, а если $\|\boldsymbol{p}\| > 1$, то, например, для вектора $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{p}}{2}$ это неравенство нарушается, так как $\frac{1}{2}\|\boldsymbol{p}\|^2 > \frac{1}{2}\|\boldsymbol{p}\|$. Следовательно, функция $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$ субдифференцируема в точке $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ и ее субдифференциал в этой точке совпадает с единичным шаром, т.е. $\partial f(\mathbf{0}) = S_1(\mathbf{0})$. Отметим, что функция $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$ недифференцируема в точке $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$. Заметим, что, вообще говоря, не любая выпуклая функция является субдифференцируемой. Например, функция

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} -\sqrt{1 - \|\boldsymbol{x}\|}, & \text{если } \|\boldsymbol{x}\| \leqslant 1, \\ +\infty, & \text{если } \|\boldsymbol{x}\| > 1 \end{cases}$$

не является субдифференцируемой в тех точках $\boldsymbol{x} \in E^n$, где $\|\boldsymbol{x}\| > 1$. Читателю предлагается проверить этот факт самостоятельно.

Задачи

1. Докажите, что функция $f(\boldsymbol{x}) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x^i|$, где x^i — координаты вектора $\boldsymbol{x}$, дифференцируема в любой точке по любому направлению и найдите ее производную по направлению.

2. Найдите субдифференциал функции $f(\boldsymbol{x}) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x^i|$ в точке $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$.

3*. Пусть функция $f : E^n \to E^1$ выпукла, конечна и дифференцируема в любой точке. Докажите, что эта функция непрерывно дифференцируема, т.е. ее градиент непрерывно зависит от $\boldsymbol{x}$.

Д4. Свойства субдифференциала

В предыдущем разделе было определено понятие субдифференциала $\partial f(\boldsymbol{x})$ выпуклой функции $f : E^n \to E^1$ в точке $\boldsymbol{x}_0$. А именно, субдифференциалом называется совокупность всех субградиентов функции $f(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}_0$. Субградиентом в свою очередь называется вектор $\boldsymbol{p} \in E^n$, удовлетворяющий для всех $\boldsymbol{x} \in E^n$ неравенству

$$\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle \leqslant f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0).$$

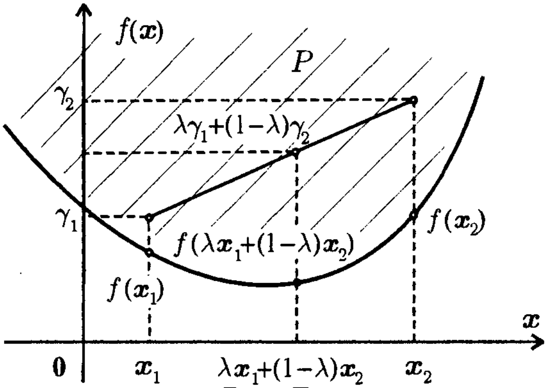


Рис. Д4

Теорема 1. *Если функция $f : E^n \to E^1$ выпукла и конечна, то она субдифференцируема в любой точке $\boldsymbol{x} \in E^n$, т.е. $\partial f(\boldsymbol{x}) \neq \emptyset$, и ее субдифференциал $\partial f(\boldsymbol{x})$ является множеством компактным и выпуклым.*

Доказательство. Покажем сначала, что множество $\partial f(\boldsymbol{x}_0)$ непусто.

Рассмотрим в пространстве $E^1 \times E^n$ множество точек, лежащих выше графика функции $f(\boldsymbol{x})$ (рис. Д4). Такое множество называется *надграфиком* функции $f(\boldsymbol{x})$ и определяется как множество

$$P = \{(\gamma, \boldsymbol{x}) \in E^1 \times E^n :\ \gamma \geqslant f(\boldsymbol{x})\}.$$

Ясно, что множество P замкнуто. Действительно, пусть последовательность точек $(\gamma_n, \boldsymbol{x}_n) \in P$ сходится к точке $(\gamma, \boldsymbol{x}) \in E^1 \times E^n$. По определению надграфика выполняется неравенство $\gamma_n \geqslant f(\boldsymbol{x}_n)$. Поскольку функция $f(\boldsymbol{x})$ непрерывна (см. теорему 1 из раздела Д3), получаем $\gamma \geqslant f(\boldsymbol{x})$, т.е. точка $(\gamma, \boldsymbol{x})$ принадлежит множеству P.

Покажем, что множество P выпукло. Пусть заданы точки $(\gamma_1, \boldsymbol{x}_1), (\gamma_2, \boldsymbol{x}_2) \in P$ и число $0 < \lambda < 1$. Согласно определению множества P имеем неравенства $\gamma_1 \geqslant f(\boldsymbol{x}_1)$, $\gamma_2 \geqslant f(\boldsymbol{x}_2)$. Поскольку функция $f(\boldsymbol{x})$ выпукла,

$$\lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2 \geqslant \lambda f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}_2) \geqslant f(\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2),$$

т.е.

$$\lambda(\gamma_1, \boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda)(\gamma_2, \boldsymbol{x}_2) \in P.$$

Таким образом, множество P есть выпуклое и замкнутое подмножество пространства $E^1 \times E^n$. Рассмотрим произволь-

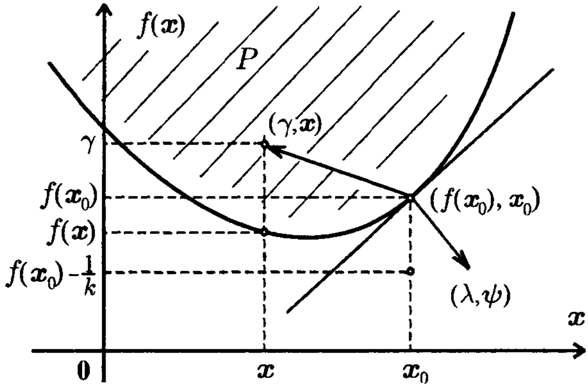


Рис. Д5

ную точку $\boldsymbol{x}_0 \in E^n$. Точка $(f(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{x}_0)$ принадлежит множеству P, но не принадлежит внутренности множества P, поскольку последовательность точек $(f(\boldsymbol{x}_0) - \frac{1}{k}, \boldsymbol{x}_0)$ не принадлежит множеству P ни при каком k и сходится к точке $(f(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{x}_0)$ при $k \to \infty$. Согласно лемме об отделимости (см. раздел Д2) множество P и точка $(f(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{x}_0)$ отделимы в пространстве $E^1 \times E^n$, т.е. существует единичный вектор $(\lambda, \boldsymbol{\psi}) \in E^1 \times E^n$ такой, что для всех точек $(\lambda, \boldsymbol{x}) \in P$ выполняется неравенство

$$\gamma\lambda + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant f(\boldsymbol{x}_0)\lambda + \langle \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\psi} \rangle. \tag{Д.26}$$

(рис. Д5). При $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ и $\gamma \geqslant f(\boldsymbol{x}_0)$ из этого неравенства получаем $\gamma\lambda \leqslant f(\boldsymbol{x}_0)\lambda$, т.е. $\lambda \leqslant 0$. Если же $\lambda = 0$, то неравенство (Д.26) принимает вид $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant \langle \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\psi} \rangle$. Последнее неравенство может выполняться для всех $\boldsymbol{x} \in E^n$ только тогда, когда $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{0}$. А это невозможно, так как вектор $(\lambda, \boldsymbol{\psi}) \in E^{n+1}$ имеет единичную длину. Следовательно, в неравенстве (Д.26) число λ отрицательно. Разделив это неравенство на λ и подставив в него точку $(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) \in P$, получим неравенство

$$\left\langle -\frac{\boldsymbol{\psi}}{\lambda}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \right\rangle \leqslant f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0),$$

которое выполняется при всех $\boldsymbol{x} \in E^n$. Следовательно, вектор $-\frac{\boldsymbol{\psi}}{\lambda} \in E^n$ принадлежит субдифференциалу $\partial f(\boldsymbol{x}_0)$ функции $f(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}_0$ (см. формулу (Д.25)), т.е. $\partial f(\boldsymbol{x}) \neq \emptyset$ и функция $f(\boldsymbol{x})$ субдифференцируема в любой точке $\boldsymbol{x}_0 \in E^n$.

Покажем теперь, что множество $\partial f(\boldsymbol{x}_0)$ замкнуто. Пусть последовательность точек $\boldsymbol{p}_k \in \partial f(\boldsymbol{x}_0)$ сходится к точке $\boldsymbol{p} \in E^n$.

В силу формулы (Д.25) имеем неравенство

$$\langle \boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle \leqslant f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0),$$

справедливое при всех $\boldsymbol{x} \in E^n$. Переходя в этом неравенстве к пределу, получим $\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle \leqslant f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)$, т.е. $\boldsymbol{p} \in \partial f(\boldsymbol{x}_0)$. Докажем ограниченность множества $\partial f(\boldsymbol{x}_0)$. Предположим противное, т.е. существует последовательность точек $\boldsymbol{p}_k \in \partial f(\boldsymbol{x}_0)$ такая, что $\|\boldsymbol{p}_k\| \to +\infty$ при $k \to +\infty$. В силу формулы (Д.25) при всех $\boldsymbol{x} \in E^n$ выполняется неравенство

$$\langle \boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle \leqslant f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0).$$

Подставив в это неравенство для каждого k точку $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \frac{\boldsymbol{p}_k}{\|\boldsymbol{p}_k\|}$, получим $\|\boldsymbol{p}_k\| \leqslant f(\boldsymbol{x}_k) - f(\boldsymbol{x}_0)$. Точки $\boldsymbol{x}_k$ принадлежат компактному шару $S_1(\mathbf{0})$. Функция $f(\boldsymbol{x})$ непрерывна согласно теореме 1 (см. раздел Д3). Поэтому правая часть последнего неравенства ограничена на множестве $S_1(\boldsymbol{x}_0)$. А это противоречит предположению о том, что $\|\boldsymbol{p}_k\| \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Осталось доказать выпуклость множества $\partial f(\boldsymbol{x}_0)$. Пусть $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \partial f(\boldsymbol{x}_0)$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Тогда в силу формулы (Д.25) при всех $\boldsymbol{x} \in E^n$ выполняются неравенства

$$\langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle \leqslant f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0), \quad \langle \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle \leqslant f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0).$$

Умножая эти неравенства на λ и $1 - \lambda$ соответственно и складывая, получаем при всех $\boldsymbol{x} \in E^n$ соотношение

$$\langle \lambda \boldsymbol{p}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle \leqslant f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0).$$

Следовательно, $\lambda \boldsymbol{p}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{p}_2 \in \partial f(\boldsymbol{x}_0)$ и теорема полностью доказана.

Следствие. *Для любого множества $F \in \Omega(E^n)$ опорная функция $c(F, \boldsymbol{\psi})$ субдифференцируема в любой точке $\boldsymbol{\psi}_0 \in E^n$ и ее субдифференциал $\partial c(F, \boldsymbol{\psi}_0)$ является множеством выпуклым и компактным.*

Теорема 2. *Пусть функция $f : E^n \to E^1$ конечна. В этом случае функция $f(\boldsymbol{\psi})$ является опорной к некоторому выпуклому множеству $F \in \Omega(E^n)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

1) $f(\lambda \boldsymbol{\psi}) = \lambda f(\boldsymbol{\psi}),\ \lambda \geqslant 0$;

2) $f(\boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\psi}_2) \leqslant f(\boldsymbol{\psi}_1) + f(\boldsymbol{\psi}_2)$.

При этом множество F имеет вид

$$F = \{\boldsymbol{f} \in E^n : \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant f(\boldsymbol{\psi}) \ \ \forall \boldsymbol{\psi} \in E^n\}. \qquad (Д.27)$$

Доказательство. Если функция $f(\psi)$ является опорной к некоторому множеству $F \in \Omega(E^n)$, то она конечна и удовлетворяет условиям 1 и 2 (см. свойства 1 и 2 опорных функций, лекция 3).

Докажем утверждение теоремы в другую сторону. Функция $f(\psi)$ конечна и выпукла, так как из условий 1 и 2 при всех $\psi_1, \psi_2 \in E^n$ следует неравенство

$$f(\lambda\psi_1+(1-\lambda)\psi_2) \leqslant f(\lambda\psi_1)+f((1-\lambda)\psi_2) = \lambda f(\psi_1)+(1-\lambda)f(\psi_2).$$

Поэтому согласно теореме 1 она субдифференцируема в любой точке $\psi_0 \in E^n$. Множество F, заданное формулой (Д.27), есть не что иное, как субдифференциал функции $f(\psi)$ в точке $\psi_0 = 0$ (сравните с формулой (Д.25)). Следовательно, в силу теоремы 1 это множество F выпукло и компактно.

Рассмотрим опорную функцию $c(F, \psi)$ этого множества F. Если показать, что $c(F, \psi) \equiv f(\psi)$, то теорема будет доказана.

Используя формулу (Д.27), получим для любого вектора $\psi \in E^n$ неравенство

$$c(F, \psi) = \max_{f \in F} \langle f, \psi \rangle \leqslant f(\psi).$$

Для доказательства равенства в этом соотношении предположим противное, т.е. пусть существует вектор $\bar{\psi} \in E^n$ такой, что $c(F, \bar{\psi}) < \langle f, \bar{\psi} \rangle$. Согласно теореме 1 множество $\partial f(\bar{\psi})$ непусто. Для вектора $p \in \partial f(\bar{\psi})$ имеем неравенство

$$\langle p, \psi - \bar{\psi} \rangle \leqslant f(\psi) - f(\bar{\psi}), \tag{Д.28}$$

справедливое при всех $\psi \in E^n$. Из условия 2 следует, что

$$f(\psi) = f(\psi - \bar{\psi} + \bar{\psi}) \leqslant f(\psi - \bar{\psi}) + f(\bar{\psi}),$$

т.е. $f(\psi) - f(\bar{\psi}) \leqslant f(\psi - \bar{\psi})$. Поэтому из неравенства (Д.28) получаем неравенство $\langle p, \psi - \bar{\psi} \rangle \leqslant f(\psi - \bar{\psi})$, справедливое для любого вектора $\psi \in E^n$, следовательно, для любого вектора $\psi - \bar{\psi} \in E^n$. Это означает, что $p \in \partial f(0) = F$.

Согласно условию 1 имеем $f(0) = 0$. Поэтому, положив в неравенстве (Д.28) $\psi = 0$, получим $\langle p, \bar{\psi} \rangle \geqslant f(\bar{\psi}) > c(F, \bar{\psi})$. Это означает согласно следствию из свойства 6 опорных функций (см. лекцию 3), что $p \notin F$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 3. *Пусть функция $f : E^n \to E^1$ выпукла и конечна. Тогда для любой точки $\boldsymbol{x} \in E^n$ опорная функция субдифференциала $\partial f(\boldsymbol{x})$ в направлениии вектора $\boldsymbol{\psi} \in E^n$ имеет вид*

$$c(\partial f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\psi}) = f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\psi}).$$

Доказательство. По теореме 2 (см. раздел Д2) производная $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\psi})$ от функции $f(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x} \in E^n$ по любому направлению $\boldsymbol{\psi} \in E^n$ существует и удовлетворяет двум свойствам:

1) $f'(\boldsymbol{x}; \lambda\boldsymbol{\psi}) = \lambda f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\psi})$, $\lambda \geqslant 0$;

2) $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\psi}_2) \leqslant f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\psi}_1) + f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\psi}_2)$.

Следовательно, согласно теореме 2 функция $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\psi})$ является опорной к множеству

$$F = \{\boldsymbol{f} \in E^n : \ \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\psi}) \ \ \forall \boldsymbol{\psi} \in E^n\}.$$

Остается доказать, что множества $\partial f(\boldsymbol{x})$ и F совпадают. Согласно определению производной по направлению имеем соотношение

$$F = \left\{\boldsymbol{f} \in E^n : \ \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{\psi}) - f(\boldsymbol{x})}{\alpha} \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in E^n\right\}.$$

Согласно теореме 2 (см. раздел Д3) для выпуклой функции $f(\boldsymbol{x})$ величина $\varphi(\alpha) = \frac{f(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{\psi})-f(\boldsymbol{x})}{\alpha}$ не возрастает при $\alpha \to +0$. Поэтому имеем равенство

$$F = \left\{\boldsymbol{f} \in E^n : \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant \frac{f(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{\psi}) - f(\boldsymbol{x})}{\alpha} \quad \forall \alpha > 0, \forall \boldsymbol{\psi} \in E^n\right\} =$$
$$= \{\boldsymbol{f} \in E^n : \langle \boldsymbol{f}, \alpha\boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant f(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{\psi}) - f(\boldsymbol{x}) \quad \forall \alpha > 0, \forall \boldsymbol{\psi} \in E^n\}.$$

Положив $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{\psi}$, получим соотношение

$$F = \{\boldsymbol{f} \in E^n : \ \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \rangle \leqslant f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) \ \ \forall \boldsymbol{y} \in E^n\} = \partial f(\boldsymbol{x}),$$

и теорема доказана.

Следствие. *Для любого множества $F \in \Omega(E^n)$ опорная функция субдифференциала $\partial c(F, \boldsymbol{\psi}_0)$ в точке $\boldsymbol{\psi}_0 \in E^n$ в направлении вектора $\boldsymbol{\psi} \in E^n$ имеет вид*

$$c(\partial c(F, \boldsymbol{\psi}_0), \boldsymbol{\psi}) = c'(F, \boldsymbol{\psi}_0; \boldsymbol{\psi}).$$

Теорема 4. *Пусть функция* $f : E^n \to E^1$ *выпукла и конечна. В этом случае функция* $f(\boldsymbol{x})$ *дифференцируема в точке* $\boldsymbol{x}_0 \in E^n$ *тогда и только тогда, когда ее субдифференциал в этой точке состоит из единственного вектора* $\partial f(\boldsymbol{x}_0) = \{\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{x}}\}$.

Доказательство. Пусть функция $f(\boldsymbol{x})$ дифференцируема в точке $\boldsymbol{x}_0$ и $\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{x}}$ — ее градиент. Тогда производная по направлению $f'(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{\psi})$ имеет вид

$$f'(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{\psi}) = \left\langle \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\psi} \right\rangle.$$

Согласно теореме 3 получим

$$c(\partial f(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{\psi}) = \left\langle \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\psi} \right\rangle,$$

т.е. опорные функции выпуклых множеств $\partial f(\boldsymbol{x}_0)$ и $\{\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{x}}\}$ совпадают. Следовательно, в силу следствия из свойства 11 опорных функций (см. лекцию 3) множества $\partial f(\boldsymbol{x}_0)$ и $\{\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{x}}\}$ совпадают, т.е. субдифференциал $\partial f(\boldsymbol{x}_0)$ состоит из единственного вектора $\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{x}}$.

Пусть теперь субдифференциал $\partial f(\boldsymbol{x}_0)$ состоит из единственного вектора $\boldsymbol{p} \in E^n$. В этом случае из теоремы 3 следует, что для любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in E^n$ выполняется равенство $f'(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{\psi}) = \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\psi} \rangle$. Учитывая определение производной по направлению, видно, что для любого числа $\alpha > 0$ и любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in E^n$ выполняется соотношение

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \alpha\boldsymbol{\psi}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \alpha\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\psi} \rangle + \bar{o}(\alpha). \tag{Д.29}$$

Покажем, что функция $f(\boldsymbol{x})$ дифференцируема в точке $\boldsymbol{x}_0$ и вектор $\boldsymbol{p}$ есть ее градиент. Для этого нужно доказать, что выполняется соотношение

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle = \bar{o}(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|).$$

Поскольку $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle \geqslant 0$ согласно определению субдифференциала $\boldsymbol{p}$ (см. формулу (Д.25)), достаточно показать, что

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle \leqslant \bar{o}(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|). \tag{Д.30}$$

При доказательстве теоремы 1 (см. раздел Д3) для вектора приращения $\boldsymbol{\Delta x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ было построено разложение

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_{2n} e_{2n}$$

(см. формулу (Д.18) из раздела Д3) по векторам $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2n} \in E^n$, причем числа ξ_i удовлетворяли условию $0 \leqslant \xi_i \leqslant \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|$, а следовательно, и условию $\bar{o}(\xi_i) \leqslant \bar{o}(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|)$. Более того, для приращения функции $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x})$ была получена оценка

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) \leqslant \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} f(\boldsymbol{x}_0 + \xi_i 2n \boldsymbol{e}_i).$$

Следовательно,

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) \leqslant \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} [f(\boldsymbol{x}_0 + \xi_i 2n \boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x}_0)]. \qquad (Д.31)$$

Каждое слагаемое под знаком суммы в этом неравенстве либо равно нулю, если $\xi_i = 0$, либо, если $\xi_i > 0$, может быть представлено согласно формуле (Д.29) в виде

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \xi_i 2n \boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x}_0) = \xi_i \langle \boldsymbol{p}, 2n \boldsymbol{e}_i \rangle + \bar{o}(\xi_i).$$

Следовательно, с учетом соотношения (Д.31) получим неравенство

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) \leqslant \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} [\xi_i \langle \boldsymbol{p}, 2n \boldsymbol{e}_i \rangle + \bar{o}(\xi_i)] \leqslant \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle + \bar{o}(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|),$$

т.е. оценка (Д.30) доказана. Этим завершается доказательство теоремы.

Мы исследовали некоторые основные свойства субдифференциала $\partial f(\boldsymbol{x}_0)$ от выпуклой функции $f(\boldsymbol{x})$. Кроме перечисленных, субдифференциал обладает еще целым рядом замечательных свойств. Можно даже построить целое субдифференциальное исчисление. Но все это не является предметом наших исследований. Заметим только, что в настоящее время субдифференциалы выпуклых функций находят широкое применение во многих областях математики.

Задачи

1. Пусть $f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})$ — выпуклые и конечные функции и $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$. Докажите равенство

$$\partial(\lambda_1 f_1(\boldsymbol{x}) + \lambda_2 f_2(\boldsymbol{x})) = \lambda_1 \partial f_1(\boldsymbol{x}) + \lambda_2 \partial f_2(\boldsymbol{x}).$$

2. Пусть $A : E^n \to E^m$ — ограниченный линейный оператор, заданный матрицей A, а функция $f : E^m \to E^1$ выпукла и конечна. Докажите, что

$$\partial(A f(\boldsymbol{x})) = A^* \partial f(\boldsymbol{x}).$$

3. Докажите, что выпуклая и конечная функция $f : E^n \to E^1$ достигает минимума в точке $\boldsymbol{x}_0 \in E^n$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} \in \partial f(\boldsymbol{x}_0)$. Сравните с аналогичным фактом для гладкой функции, когда $\mathbf{0} = \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{x}}$.

4*. Пусть функция $f : E^n \to E^1$ выпукла и конечна. Докажите, что ее субдифференциал $\partial f(\boldsymbol{x})$ является полунепрерывным сверху многозначным отображением, т.е. для любой точки $\boldsymbol{x}_0 \in E^n$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что при всех $\boldsymbol{x}$ таких, что $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant \delta$, выполняется включение

$$\partial f(\boldsymbol{x}) \subset \partial f(\boldsymbol{x}_0) + S_\varepsilon(\mathbf{0}).$$

Д5. Опорное множество

Опорным множеством (см. лекцию 3, рис. 7 и рис. Д5) для множества $F \in \Omega(E^n)$ в направлении $\boldsymbol{\psi} \in E^n$ называется множество всех векторов $\boldsymbol{f}_0 \in F$, на которых достигается максимум в опорной функции

$$c(F, \boldsymbol{\psi}_0) = \max_{\boldsymbol{f} \in F} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_0 \rangle.$$

Обозначив это опорное множество через $\mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0)$, имеем

$$\mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0) = \{\boldsymbol{f} \in F : \ \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_0 \rangle = c(F, \boldsymbol{\psi}_0)\}. \qquad \text{(Д.32)}$$

Очевидно, что если $\boldsymbol{\psi}_0 \neq 0$, то опорное множество $\mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0)$ есть пересечение множества F и опорной гиперплоскости

$$\Gamma_{\boldsymbol{\psi}_0} = \{\boldsymbol{f} \in E^n : \ \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_0 \rangle = c(F, \boldsymbol{\psi}_0)\}. \qquad \text{(Д.33)}$$

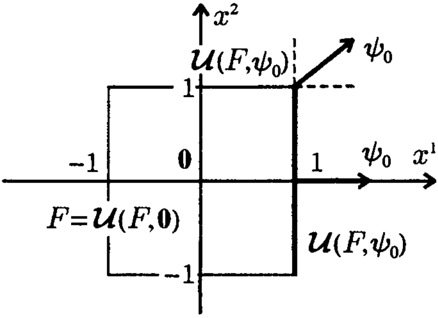


Рис. Д6

Если же $\boldsymbol{\psi}_0 = \mathbf{0}$, то $\mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0) = F$. Поэтому $\mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0) \in \Omega(E^n)$, т.е. множество $\mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0)$ является непустым и компактным. Более того, если множество F выпукло, то и его опорное множество $\mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0)$ также выпукло.

Пример 1. Пусть множество $F \in \Omega(E^n)$ задано условием

$$F = \{\boldsymbol{x} \in E^2 : \ |x^1| \leqslant 1, \ |x^2| \leqslant 1\}.$$

Это есть квадрат на плоскости со сторонами, параллельными осям координат (рис. Д6). Ясно, что если ни одна из координат ψ^1, ψ^2 вектора $\boldsymbol{\psi}$ не равна нулю, то опорное множество $\mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi})$ состоит из единственной точки $(\operatorname{sign}\psi^1, \operatorname{sign}\psi^2)$. В остальных случаях опорное множество задается соотношениями

$$\mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}) = \begin{cases} \{\boldsymbol{x} \in E^2 : \ x^1 = \operatorname{sign}\psi^1, \ |x^2| \leqslant 1\}, & \psi^1 \neq 0, \ \psi^2 = 0, \\ \{\boldsymbol{x} \in E^2 : \ |x^1| \leqslant 1, \ x^2 = \operatorname{sign}\psi^2\}, & \psi^1 = 0, \ \psi^2 \neq 0, \\ F, & \psi^1 = 0, \ \psi^2 = 0. \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть задано множество $F \in \Omega(E^n)$ и его опорная функция $c(F, \boldsymbol{\psi})$. Тогда выпуклая оболочка $\operatorname{conv}\mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0)$ опорного множества $\mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0)$ в направлении $\boldsymbol{\psi}_0 \in E^n$ совпадает с субдифференциалом $\partial c(F, \boldsymbol{\psi}_0)$ опорной функции $c(F, \boldsymbol{\psi})$ в точке $\boldsymbol{\psi}_0$, т.е.*

$$\operatorname{conv}\mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0) = \partial c(F, \boldsymbol{\psi}_0). \tag{Д.34}$$

Доказательство. Вспомним, что субдифференциал опорной функции задается соотношением

$$\partial c(F, \boldsymbol{\psi}_0) = \{\boldsymbol{f} \in E^n : \ \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_0 \rangle \leqslant \leqslant c(F, \boldsymbol{\psi}) - c(F, \boldsymbol{\psi}_0) \ \ \forall \boldsymbol{\psi} \in E^n\}. \tag{Д.35}$$

Покажем сначала, что выполняется включение

$$\mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0) \subset \partial c(F, \boldsymbol{\psi}_0). \tag{Д.36}$$

Пусть $\boldsymbol{f} \in \mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0)$, тогда из формулы (Д.32) следует, что $\boldsymbol{f} \in F$, $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_0 \rangle = c(F, \boldsymbol{\psi}_0)$. В силу следствия из свойства 6 опорных функций (см. лекцию 3) для любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in E^n$ выполняется неравенство $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle \leqslant c(F, \boldsymbol{\psi})$. Отсюда получаем соотношение

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_0 \rangle \leqslant c(F, \boldsymbol{\psi}) - c(F, \boldsymbol{\psi}_0).$$

Это значит, что вектор $\boldsymbol{f}$ принадлежит субдифференциалу $\partial c(F, \boldsymbol{\psi}_0)$ (см. формулу (Д.35)), и включение (Д.36) доказано.

Докажем теперь включение

$$\partial c(F, \boldsymbol{\psi}_0) \subset \operatorname{conv} F. \tag{Д.37}$$

Пусть $\boldsymbol{f} \in \partial c(F, \boldsymbol{\psi}_0)$. Используя формулу (Д.35) и свойство 2 опорных функций (см. лекцию 3), для любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in E^n$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_0 \rangle \leqslant c(F, \boldsymbol{\psi}) - c(F, \boldsymbol{\psi}_0) = \\ = c(F, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_0 + \boldsymbol{\psi}_0) - c(F, \boldsymbol{\psi}_0) \leqslant c(F, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_0). \end{aligned}$$

Это значит, что для любого вектора $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_0 \in E^n$ справедливо неравенство $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{h} \rangle \leqslant c(F, \boldsymbol{h})$. Отсюда согласно свойству 9 опорных функций (см. лекцию 3) следует, что $\boldsymbol{f} \in \operatorname{conv} F$. Таким образом, включение (Д.37) доказано.

Докажем теперь включение

$$\partial c(F, \boldsymbol{\psi}_0) \subset \Gamma_{\boldsymbol{\psi}_0}. \tag{Д.38}$$

Пусть $\boldsymbol{f} \in \partial c(F, \boldsymbol{\psi}_0)$. Тогда для любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in E^n$ выполняется неравенство (см. формулу (Д.35))

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_0 \rangle \leqslant c(F, \boldsymbol{\psi}) - c(F, \boldsymbol{\psi}_0).$$

Положив в этом неравенстве $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{\psi} = 2\boldsymbol{\psi}_0$, получим соответственно два неравенства $-\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_0 \rangle \leqslant -c(F, \boldsymbol{\psi}_0)$ и $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_0 \rangle \leqslant$ $\leqslant c(F, \boldsymbol{\psi}_0)$, т.е. получим равенство $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_0 \rangle = c(F, \boldsymbol{\psi}_0)$. Следовательно, в силу соотношения (Д.33) $\boldsymbol{f} \in \Gamma_{\boldsymbol{\psi}_0}$ и включение (Д.38) доказано.

Докажем теперь еще одно соотношение

$$\operatorname{conv} F \cap \Gamma_{\boldsymbol{\psi}_0} = \operatorname{conv} \mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0). \tag{Д.39}$$

Пусть $\boldsymbol{f} \in \operatorname{conv} F \cap \Gamma_{\psi_0}$, тогда $\boldsymbol{f} \in \operatorname{conv} F$ и $\boldsymbol{f} \in \Gamma_{\psi_0}$. В разделе Д1 показано, что любая точка $\boldsymbol{f}$ из выпуклой оболочки $\operatorname{conv} F$ может быть представлена в виде

$$\boldsymbol{f} = \lambda_1 \boldsymbol{f}_1 + \ldots + \lambda_{n+1} \boldsymbol{f}_{n+1}, \quad \boldsymbol{f}_i \in F, \quad \lambda_i \geqslant 0,$$
$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1. \quad (\text{Д.40})$$

Поскольку $\boldsymbol{f}_i \in F$, используя следствие из свойства 6 опорных функций (см. лекцию 3), можно написать $n+1$ неравенство

$$\langle \boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{\psi}_0 \rangle \leqslant c(F, \boldsymbol{\psi}_0), \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

В действительности во всех этих неравенствах выполняется равенство, так как если хотя бы в одном из них будет выполняться строгое неравенство, то, умножив эти неравенства на $\lambda_i \geqslant 0$ и сложив их, получим в силу формулы (Д.40) строгое неравенство $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}_0 \rangle < c(F, \boldsymbol{\psi}_0)$, что противоречит включению $\boldsymbol{f} \in \Gamma_{\psi_0}$. Таким образом, $\boldsymbol{f}_i \in \Gamma_{\psi_0}$ и, следовательно, по определению опорного множества (см. формулу (Д.32)) $\boldsymbol{f}_i \in \mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0)$. Отсюда, учитывая представление (Д.40), получим включение $\boldsymbol{f} \in \operatorname{conv} \mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0)$. В одну сторону равенство (Д.39) доказано.

Пусть теперь $\boldsymbol{f} \in \operatorname{conv} \mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0)$. Тогда справедливо представление (Д.40), где $\boldsymbol{f}_i \in \mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0)$. Следовательно, $\boldsymbol{f}_i \in F$ и $\boldsymbol{f}_i \in \Gamma_{\psi_0}$. Таким образом, $\boldsymbol{f} \in \operatorname{conv} F \cap \Gamma_{\psi_0}$ и равенство (Д.39) полностью доказано. Для завершения доказательства теоремы остается воспользоваться всеми установленными фактами. Согласно включениям (Д.37) и (Д.38) $\partial c(F, \boldsymbol{\psi}_0) \subset \operatorname{conv} F \cap \Gamma_{\psi_0}$ и, следовательно, по условию (Д.39) справедливо включение

$$\partial c(F, \boldsymbol{\psi}_0) \subset \operatorname{conv} \mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0).$$

Поскольку множество $\partial c(F, \boldsymbol{\psi}_0)$ выпукло (см. теорему 1 из раздела Д4), учитывая включение (Д.36), получим требуемое равенство (Д.34). Теорема доказана.

Следствие. *Опорная функция от опорного множества имеет вид*

$$c(\mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0), \boldsymbol{\psi}) = c'(F, \boldsymbol{\psi}_0; \boldsymbol{\psi}). \quad (\text{Д.41})$$

Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 1 и следствия из теоремы 3 (см. раздел Д4).

Пример 2. Найдем опорное множество шара $S_r(\boldsymbol{a})$ в направлении $\boldsymbol{\psi}_0 \in E^n$. Опорная функция шара нам известна, $c(S_r(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{\psi}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{\psi} \rangle + r\|\boldsymbol{\psi}\|$. Пусть $\boldsymbol{\psi}_0 \neq \mathbf{0}$. Производная по направлению $\boldsymbol{\psi}$ в точке $\boldsymbol{\psi}_0$ от этой функции имеет вид

$$c'(S_r(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{\psi}_0; \boldsymbol{\psi}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{\psi} \rangle + r \left\langle \frac{\boldsymbol{\psi}_0}{\|\boldsymbol{\psi}_0\|}, \boldsymbol{\psi} \right\rangle.$$

Это есть опорная функция вектора $\boldsymbol{a} + r\frac{\boldsymbol{\psi}_0}{\|\boldsymbol{\psi}_0\|}$. Из формулы (Д.41) следует, что $\mathcal{U}(S_r(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{\psi}_0) = \boldsymbol{a} + r\frac{\boldsymbol{\psi}_0}{\|\boldsymbol{\psi}_0\|}$. Если $\boldsymbol{\psi}_0 = \mathbf{0}$, то $\mathcal{U}(S_r(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{\psi}_0) = S_r(\boldsymbol{a})$.

Множество $F \in \Omega(E^n)$ называется *строго выпуклым в направлении* $\boldsymbol{\psi}_0 \in E^n$, если его опорное множество $\mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0)$ состоит из единственной точки. Множество F называется *строго выпуклым*, если оно строго выпукло в любом направлении $\boldsymbol{\psi}_0 \neq \mathbf{0}$. Поскольку $\mathcal{U}(F, \mathbf{0}) = F$, множество F строго выпукло в направлении $\boldsymbol{\psi}_0 = \mathbf{0}$ только в том случае, если оно состоит из единственной точки, т.е. $F = \{\boldsymbol{f}\}$. Заметим, что строго выпуклое множество не обязательно является выпуклым.

Пример 3. Единичная сфера S в пространстве E^n является множеством строго выпуклым, так как $\mathcal{U}(S_1(\mathbf{0}), \boldsymbol{\psi}_0) = \left\{\frac{\boldsymbol{\psi}_0}{\|\boldsymbol{\psi}_0\|}\right\}$ (см. пример 2). Однако она не является выпуклым множеством.

Пример 4. Квадрат

$$F = \{\boldsymbol{x} \in E^2 : \ |x^1| \leqslant 1, |x^2| \leqslant 1\}$$

на плоскости не является множеством строго выпуклым, поскольку его опорное множество состоит более чем из одной точки для тех векторов $\boldsymbol{\psi}_0$, у которых хотя бы одна координата нулевая (см. пример 1 и рис. Д6). Для остальных направлений $\boldsymbol{\psi}_0$ множество F строго выпукло.

Теорема 2. *Множество $F \in \Omega(E^n)$ строго выпукло в направлении $\boldsymbol{\psi}_0$ тогда и только тогда, когда его опорная функция $c(F, \boldsymbol{\psi})$ дифференцируема в точке $\boldsymbol{\psi}_0$.*

Доказательство. Согласно определению множество $F \in$ $\in \Omega(E^n)$ строго выпукло в направлении $\boldsymbol{\psi}_0$ тогда и только тогда, когда опорное множество $\mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0)$ состоит из единственной точки. Поскольку в силу теоремы 1 выполняется равенство $\operatorname{conv}\mathcal{U}(F, \boldsymbol{\psi}_0) = \partial c(F, \boldsymbol{\psi})$, данное условие эквивалентно тому, что субдифференциал $\partial c(F, \boldsymbol{\psi})$ состоит из единственной точки.

А это, в свою очередь, справедливо тогда и только тогда, когда опорная функция $c(F, \psi)$ дифференцируема в точке ψ_0. Теорема доказана.

Следствие. *Множество $F \in \Omega(E^n)$ строго выпукло тогда и только тогда, когда его опорная функция дифференцируема во всех точках, кроме $\psi = \mathbf{0}$.*

Задачи

1. Найдите опорное множество эллипса

$$F = \left\{ \boldsymbol{x} \in E^2 : \left(\frac{x^1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{b}\right)^2 = 1 \right\}, \quad a, b \neq 0$$

в произвольном направлении $\psi_0 \in E^2$. Будет ли это множество строго выпуклым?

2. Докажите, что сумма $A + B$ двух множеств $A, B \in \Omega(E^n)$, строго выпуклых в направлении $\psi_0 \in E^n$, также является множеством строго выпуклым в направлении ψ_0.

3. Докажите, что произведение λF множества $F \in \Omega(E^n)$, строго выпуклого в направлении $\psi_0 \in E^n$, на произвольное число λ также является множеством, строго выпуклым в направлении ψ_0.

4*. Теорема 2 позволяет построить параметризацию границы выпуклого и строго выпуклого множества $F \in \Omega(E^n)$ точками единичной сферы. Докажите, что в этом случае функция

$$\frac{\partial c(F, \cdot)}{\partial \psi} : S \to E^n$$

взаимно однозначно отображает единичную сферу $S \subset E^n$ на границу множества F. Докажите, что эта функция непрерывна.

Д6. Измеримость

Понятие измеримости — одно из фундаментальных в математическом анализе. Для того чтобы в дальнейшем использовать это понятие, в настоящем разделе даны определения и приведены основные свойства (без доказательств) измеримых множеств, измеримых функций и интеграла Лебега. Доказательства этих свойств читатель сможет найти во многих учебниках по математическому анализу, например, в [3], [4] или провести самостоятельно.

Измеримые множества

Рассмотрим некоторый отрезок $I = [t_0, t_1]$ и на этом отрезке I — систему Σ таких подмножеств $A \subset I$, для которых можно определить длину, или *меру множества*. Каждое множество A из системы Σ называется измеримым, и ему ставится в соответствие некоторое число $\mu(A)$ — его мера Лебега, т.е. определяется функция $\mu : \Sigma \to E^1$. Систему измеримых множеств Σ и соответствующую меру Лебега μ определим в несколько этапов.

Прежде всего к системе Σ отнесем всевозможные интервалы вида

$$(a, b), \quad [a, b], \quad (a, b], \quad [a, b) \tag{Д.42}$$

из отрезка I. Меру Лебега для таких интервалов определим, положив $\mu = b - a$. Следовательно, как частный случай определена мера всего отрезка $I = [t_0, t_1]$, именно $\mu(I) = t_1 - t_0$, мера одной точки $t \in I$, именно $\mu(\{t\}) = 0$, а также мера пустого множества, именно $\mu(\emptyset) = 0$. Далее, к системе Σ отнесем любое множество $A \subset I$, которое можно представить как объединение конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов P_i вида (Д.42), т.е. любое множество

$$A = \bigcup_i P_i, \quad P_i \cap P_j = \emptyset, \quad i \neq j. \tag{Д.43}$$

Меру Лебега для этих множеств A определим, положив $\mu(A) = \sum\limits_i \mu(P_i)$. Следовательно, в систему Σ входят всевозможные открытые множества из отрезка I, так как любое такое открытое множество можно представить в виде объединения конечного или счетного числа попарно различных открытых интервалов.

К системе Σ отнесем также любое множество $A \subset I$, которое можно представить как дополнение до всего отрезка I объединения конечного или счетного числа попарно различных интервалов P_i вида (Д.42), т.е. любое множество

$$A = I \setminus \bigcup_i P_i, \quad P_i \cap P_j = \emptyset, \quad i \neq j. \tag{Д.44}$$

Меру Лебега для таких множеств определим, положив $\mu(A) = \mu(I) - \sum\limits_i \mu(P_i)$. Следовательно, в систему Σ входят всевозможные замкнутые множества из отрезка I, так как любое такое замкнутое множество можно представить как дополнение до всего отрезка объединения конечного или счетного числа попарно различных открытых интервалов.

Итак, система Σ получилась достаточно богатой, она содержит всевозможные интервалы вида (Д.42) и всевозможные множества видов (Д.43) и (Д.44). Но этого оказывается недостаточно, поэтому к системе Σ отнесем еще некоторые множества. Сделаем это следующим образом.

Рассмотрим для произвольного множества $A \subset I$ всевозможные покрытия этого множества конечным или счетным числом интервалов P_i вида (Д.43). Тогда имеем $A \subset \bigcup\limits_i P_i$. *Верхней мерой $\mu^*(A)$ множества A* назовем число

$$\mu^*(A) = \inf \sum_i \mu(P_i).$$

Здесь нижняя грань берется по всевозможным указанным покрытиям множества A.

Далее, *нижней мерой $\mu_*(A)$ множества A* назовем число

$$\mu_*(A) = \mu(I) - \mu^*(I \setminus A).$$

Если верхняя и нижняя меры множества A совпадают и равны числу μ, т.е. $\mu^*(A) = \mu_*(A) = \mu$, то такое множество мы также отнесем к системе Σ, т.е. назовем его *измеримым*, а число μ — его *мерой Лебега*. Конечно, нужно доказывать корректность такого перехода, т.е. если множество $A \subset I$ имеет один из видов (Д.42), (Д.43) или (Д.44), то нужно доказать, что его мера, построенная с помощью верхней и нижней меры, совпадает с введенной ранее мерой Лебега.

Мы построили систему Σ измеримых множеств на отрезке $I = [t_0, t_1]$ и для каждого измеримого множества A определили его меру Лебега $\mu(A)$. Заметим, что на отрезке I существуют и неизмеримые множества, т.е. не все подмножества отрезка I попали в систему Σ.

Произвольное множество $A \subset E^1$ назовем измеримым, если измеримы все множества $A \cap [i, i+1]$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ В этом случае мерой множества A назовем число

$$\mu(A) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mu(A \cap [i, i+1]).$$

Таким образом, на числовой прямой введено понятие измеримого множества.

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется *почти всюду на отрезке* $[t_0, t_1]$, если оно выполняется для всех точек $t \in [t_0, t_1] \setminus A$ и множество A имеет нулевую меру, т.е. $\mu(A) = 0$.

Измеримые функции

Функция $\boldsymbol{f} : E^1 \to E^n$ называется *измеримой*, если прообраз любого открытого шара $\widetilde{S}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x} \in E^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \varepsilon\}$ из пространства E^n при отображении $\boldsymbol{f}$ есть множество измеримое, т.е. принадлежит системе множеств Σ. Следовательно, функция $\boldsymbol{f}(t)$ измерима, если для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки $\boldsymbol{x}_0 \in E^n$ выполняется соотношение

$$\boldsymbol{f}^{-1}(\widetilde{S}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)) = \{t : \|\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{x}_0\| < \varepsilon\} \in \Sigma.$$

Таким образом, любая непрерывная функция $\boldsymbol{f}(t)$ измерима, так как для нее прообраз любого открытого шара есть множество открытое, а следовательно, он принадлежит системе множеств Σ.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f : E^1 \to E^1$, определенную следующим условием (рис. Д7):

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } -\infty < t \leqslant 0, \\ -1, & \text{если } 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

Покажем, что эта функция измерима. В данном случае для произвольного открытого шара в пространстве E^1, т.е. произвольного открытого интервала, возможны лишь четыре случая: этот интервал не содержит точек $1, -1$; содержит лишь точку 1; содержит лишь точку -1 (см. рис. Д7); содержит обе точки $1, -1$. Прообраз этого интервала в первом случае будет пустым множеством, во втором случае будет совпадать с интервалом $(-\infty, 0]$, в третьем — с интервалом $(0, +\infty)$, и в четвер-

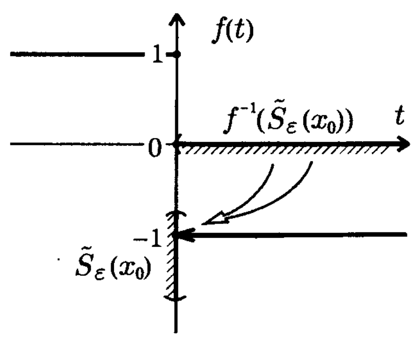


Рис. Д7

том — со всей прямой E^1. Но все эти множества входят в систему множеств Σ, построенную для прямой E^1. Следовательно, функция $f(t)$ измерима.

Рассмотрим некоторые свойства измеримых функций, которые далее будем использовать. Класс непрерывных функций C вкладывается в класс измеримых функций L, т.е. мы получили расширение класса всех непрерывных функций до класса всех измеримых функций.

Свойство 1. *Функция $\boldsymbol{f} : E^1 \to E^n$ измерима на отрезке $[t_0, t_1]$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $\boldsymbol{f}_k(t)$ функций, непрерывных на отрезке $[t_0, t_1]$, что при всех $t \in [t_0, t_1]$ выполняется соотношение*

$$\boldsymbol{f}(t) = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{f}_k(t).$$

Свойство 2. *Пусть $\boldsymbol{f}_k : E^1 \to E^n$ — последовательность таких измеримых функций, что для каждого t последовательность $\{\boldsymbol{f}_k(t)\}$ сходится к значению $\boldsymbol{f}(t)$. Тогда предельная функция $\boldsymbol{f}(t)$ измерима.*

Таким образом, пространство измеримых функций является замкнутым относительно поточечной сходимости.

Свойство 3. *Если функция $\boldsymbol{f} : E^1 \to E^n$ измерима, а функция $\boldsymbol{g} : E^n \to E^m$ — непрерывна, то их суперпозиция $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(t)) : E^1 \to E^m$ будет функцией измеримой.*

Свойство 4. *Пусть $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 : E^1 \to E^n$ и $\lambda : E^1 \to E^1$ — измеримые функции. Тогда функции $\boldsymbol{f}_1(t) \pm \boldsymbol{f}_2(t)$, $\lambda(t)\boldsymbol{f}_1(t)$ и $\frac{\boldsymbol{f}_1(t)}{\lambda(t)}$ (при $\lambda(t) \neq 0$) также измеримы.*

Функция $\boldsymbol{f} : E^1 \to E^n$ называется *простой*, если она принимает не более чем счетное число значений $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots \in E^n$.

Свойство 5. *Пусть функция $\boldsymbol{f} : E^1 \to E^n$ простая и $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots \in E^n$ есть множество ее значений. В таком случае функция $\boldsymbol{f}(t)$ измерима тогда и только тогда, когда измеримы все множества $A_i = \{t \in E^1 : \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{x}_i\}$.*

Свойство 6. *Функция $\boldsymbol{f} : E^1 \to E^n$ измерима тогда и только тогда, когда она является равномерным пределом последовательности простых функций, т.е. существует такая последовательность $\boldsymbol{f}_k(t)$ простых измеримых функций, что $\boldsymbol{f}(t) = \lim\limits_{k\to+\infty} \boldsymbol{f}_k(t)$ равномерно для всех $t \in E^1$.*

Оказывается, понятие интеграла можно распространить на класс измеримых функций. Сначала сделаем это для простых измеримых функций. Пусть заданы отрезок $I = [t_0, t_1] \subset E^1$, простая измеримая функция $\boldsymbol{f} : I \to E^n$ и множество ее значений $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots \in E^n$. Тогда по свойству 5 измеримых функций все множества $\{t : \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{f}(t)\}$ измеримы. Если ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(\{t : \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{x}_i\})\boldsymbol{x}_i$$

абсолютно сходится, то его сумму назовем интегралом Лебега от функции $\boldsymbol{f}(t)$ и обозначим $\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(t)dt$. Таким образом,

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(t)dt = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\{t : \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{x}_i\})\boldsymbol{x}_i.$$

Пример 2. Пусть функция $f : E^1 \to E^1$ кусочно постоянна на отрезке $[0, l]$, где l — целое число, и задана следующим образом: $f(t) = f_i$ при $i \leqslant t < i + 1$ $(i = 0, 1, \ldots, l - 1)$ (рис. Д8). Среди чисел f_i могут быть и совпадающие. Обозначим через x_j, $j = 0, 1, \ldots, m \leqslant l - 1$ набор всех различных чисел из $\{f_i\}$. Интеграл Лебега от этой функции имеет вид

$$\int_0^l f(t)dt = \sum_{j=0}^{m} \mu(\{t : f(t) = x_j\})x_j. \tag{Д.45}$$

Функция $f(t)$ кусочно постоянна на отрезке $[0, l]$. Поэтому у функции $f(t)$ существует обычный интеграл Римана. Он имеет вид

$$\int_0^l f(t)dt = \sum_{i=0}^{l-1} f_i \tag{Д.46}$$

и равен площади заштрихованной фигуры (рис. Д8). Ясно, что эти интегралы совпадают. Поясним, как вычисляется этот интеграл по Риману и по Лебегу. По Риману (см. формулу (Д.46))

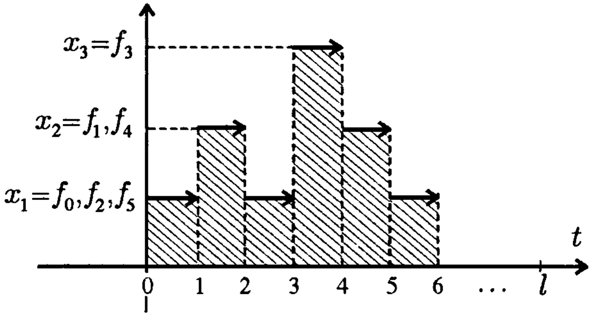


Рис. Д8

необходимо просуммировать подряд все числа f_i, по Лебегу (см. формулу (Д.45)) — найти общую длину $\mu(\{t : f(t) = x_j\})$ отрезков, где функция $f(t)$ принимает одно и то же значение x_j, умножить эту длину на значение x_j и все просуммировать. Различие между этими интегралами наглядно иллюстрирует сравнение, которое принадлежит Лебегу: у нас имеется мешок денег и нужно найти их общую сумму. По Риману надо вынимать из мешка по одной монете и, складывая цифры, написанные на монетах, найти общую сумму, по Лебегу — сначала разложить все монеты на кучки из монет одного достоинства, найти сумму в каждой кучке и все просуммировать.

Пусть теперь задана произвольная измеримая функция $\boldsymbol{f} : I \to E^n$. Тогда по свойству 6 измеримых функций существует последовательность $\boldsymbol{f}_k(t)$ простых измеримых функций такая, что для всех $t \in I$ выполнено соотношение $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{f}_k(t) = \boldsymbol{f}(t)$. Если существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}_k(t)dt$, то он называется интегралом Лебега от функции $\boldsymbol{f}(t)$ и обозначается через $\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(t)dt$. Таким образом, имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(t)dt = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}_k(t)dt.$$

Конечно, нужно доказать корректность такого определения интеграла Лебега, т.е. доказать, что интеграл Лебега от функции $\boldsymbol{f}(t)$ не зависит от выбора последовательности простых функций $\boldsymbol{f}_k(t)$.

Рассмотрим некоторые свойства интеграла Лебега.

Свойство 1. *Если функция* $\boldsymbol{f} : I \to E^n$ *интегрируема по Риману, то она также интегрируема по Лебегу, и эти интегралы совпадают.*

Таким образом, интеграл Лебега является расширением интеграла Римана на измеримые функции.

Свойство 2. *Функция* $\boldsymbol{f} : I \to E^n$ *интегрируема по Лебегу тогда и только тогда, когда функция* $\boldsymbol{f}(t)$ *измерима и* $\|\boldsymbol{f}(t)\| \leqslant k(t)$ *для всех* $t \in I$, *где* $k : I \to E^1$ *— скалярная функция, интегрируемая по Лебегу.*

Заметим, что ограниченная функция $\boldsymbol{f} : I \to E^n$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она непрерывна почти всюду на отрезке I.

Для интеграла Лебега выполняются все обычные свойства интеграла Римана. Приведем здесь лишь часть из них.

Свойство 3. *Если функции* $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 : E^1 \to E^n$ *интегрируемы и* λ *— некоторое число, то справедливы соотношения*

$$\int_{t_0}^{t_1} [\boldsymbol{f}_1(t) \pm \boldsymbol{f}_2(t)]dt = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}_1(t)dt \pm \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}_2(t)dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda \boldsymbol{f}(t)dt = \lambda \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(t)dt,$$

$$\int_{t_0}^{\tau} \boldsymbol{f}(t)dt + \int_{\tau}^{t_1} \boldsymbol{f}(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(t)dt, \quad \tau \in I,$$

$$\left\| \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(t)dt \right\| \leqslant \int_{t_0}^{t_1} \|\boldsymbol{f}(t)\|dt.$$

Свойство 4. *Пусть функция* $\boldsymbol{f} : I \to E^n$ *интегрируема и* $\tau \in I$. *Тогда интеграл*

$$\boldsymbol{g}(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} \boldsymbol{f}(t)dt$$

непрерывно зависит от верхнего предела интегрирования τ, *т.е. функция* $\boldsymbol{g} : I \to E^n$ *непрерывна.*

Приведем два свойства интеграла Лебега для случая $n = 1$.

Свойство 5. *Если функция $f : I \to E^1$ интегрируема и $f(t) \geqslant 0$, то $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt \geqslant 0$.*

Свойство 6. *Если функция $f : I \to E^1$ интегрируема, $f(t) \geqslant 0$ и $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt = 0$, то функция $f(t)$ почти всюду на отрезке I равна нулю.*

Д7. Многозначные отображения

Многозначным отображением называется (см. лекцию 4) произвольная функция $F : E^1 \to \Omega(E^n)$, т.е. функция $F(t)$, значения которой суть непустые компактные множества в пространстве E^n. Отображение $F(t)$ назовем *измеримым* на отрезке $I = [t_0, t_1]$, если его опорная функция $c(F(t), \boldsymbol{\psi})$ измерима по t на отрезке I для каждого фиксированного вектора $\boldsymbol{\psi} \in E^n$. Такое определение измеримости является очень общим, и широкий класс функций $F(t)$ измерим в указанном смысле. Обычно в литературе по многозначным функциям измеримость определяют для более узкого класса отображений $F(t)$. Поскольку по опорной функции $c(F(t), \boldsymbol{\psi})$ можно восстановить лишь выпуклую оболочку $\operatorname{conv} F(t)$, данное определение измеримости накладывает ограничение на поведение лишь многозначной функции $\operatorname{conv} F : E^1 \to \Omega(E^n)$ и никак не отражает того, что происходит с той частью множества $F(t)$, которая лежит внутри $\operatorname{conv} F(t)$. Тем не менее все приводимые ниже результаты справедливы для многозначных отображений $F(t)$, измеримых в указанном смысле.

Любое непрерывное многозначное отображение $F : E^1 \to \to \Omega(E^n)$ измеримо, поскольку его опорная функция $c(F(t), \boldsymbol{\psi})$ непрерывна по t при каждом фиксированном $\boldsymbol{\psi} \in E^n$ (см. теорему 1 из лекции 4) и, следовательно, измерима.

Теорема 1 (теорема Филиппова). *Если многозначное отображение $F : E^1 \to \Omega(E^n)$ измеримо, то у него существует измеримая однозначная ветвь $\boldsymbol{f}(t) \in F(t)$.*

Доказательство. Пусть многозначное отображение $F(t)$ измеримо, т.е. его опорная функция $c(F(t), \boldsymbol{\psi})$ измерима по t.

Зафиксируем произвольный вектор $\boldsymbol{\psi}_0 \in E^n$ и рассмотрим опорное множество $\mathcal{U}(F(t), \boldsymbol{\psi}_0)$. Его опорная функция $c(\mathcal{U}(F(t), \boldsymbol{\psi}_0), \boldsymbol{\psi})$ имеет вид (см. следствие из теоремы 1, раздел Д5)

$$c(\mathcal{U}(F(t), \boldsymbol{\psi}_0), \boldsymbol{\psi}) = c'(F(t), \boldsymbol{\psi}_0; \boldsymbol{\psi}).$$

Согласно определению производной по направлению имеем

$$c'(\mathcal{U}(F(t), \psi_0); \psi) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{c(F(t), \psi_0 + \alpha\psi) - c(F(t), \psi_0)}{\alpha}. \quad (Д.47)$$

Следовательно, опорная функция $c(\mathcal{U}(F(t), \psi_0), \psi)$ измерима по t как предел последовательности измеримых функций (см. свойство 2 измеримых функций, раздел Д6). Поскольку $F(t) \in \in \Omega(E^n)$, то $\mathcal{U}(F(t), \psi_0) \in \Omega(E^n)$, т.е. опорное множество непусто и компактно. Далее, множество $\mathcal{U}(F(t), \psi_0)$ содержится в гиперплоскости Γ_{ψ_0}, опорной к множеству $F(t)$. Следовательно, его размерность не превосходит $n - 1$ (размерность множества $F \subset E^n$ равна размерности минимального линейного многообразия, содержащего множество F).

Будем теперь последовательно выбирать в качестве вектора ψ_0 базисные векторы $e_1, \dots, e_n$ пространства E^n. Рассмотрим последовательность многозначных отображений

$$\mathcal{U}_1(t) = \mathcal{U}(F(t), e_1),\ \mathcal{U}_2(t) = \mathcal{U}(\mathcal{U}_1(t), e_2),\ \dots$$
$$\dots,\ \mathcal{U}_n(t) = \mathcal{U}(\mathcal{U}_{n-1}(t), e_n).$$

Опорная функция $c(\mathcal{U}_i(t), \psi)$ каждого отображения $\mathcal{U}_i(t)$ из данной последовательности измерима по t. Кроме того, для любого $t \in E^1$ справедливо включение $\mathcal{U}_i(t) \in \Omega(E^n)$ и размерность множества $\mathcal{U}_i(t)$ не превосходит $n - i$, поскольку это множество лежит в пересечении i ортогональных гиперплоскостей $\Gamma_{e_1}, \dots, \Gamma_{e_i}$. Согласно определению опорного множества имеем последовательность включений

$$\mathcal{U}_n(t) \subset \mathcal{U}_{n-1}(t) \subset \dots \subset \mathcal{U}_1(t) \subset F(t).$$

Поскольку размерность множества $\mathcal{U}_n(t)$ не превосходит нуля и $\mathcal{U}_n(t) \in \Omega(E^n)$, множество $\mathcal{U}_n(t)$ состоит из единственной точки $u_n(t)$. Обозначим ее через $f(t)$, т.е. $f(t) = u_n(t)$. Далее, опорная функция $c(\mathcal{U}_n(t), \psi) = \langle u_n(t), \psi \rangle = \langle f(t), \psi \rangle$ измерима по t для любого вектора $\psi \in E^n$. Отсюда следует, что сама функция $f(t) : E^1 \to E^n$ измерима. Действительно, если положить последовательно $\psi = e_1, \dots, e_n$, то получим, что каждая координата $f_i(t) = \langle f(t), e_i \rangle$ у функции $f(t)$ измерима. Теперь сама функция

$$f(t) = f_1(t)e_1 + \dots + f_n(t)e_n$$

измерима как суперпозиция непрерывной и измеримых функций (свойство 3 измеримых функций из раздела Д6). Поскольку $\boldsymbol{f}(t) \in F(t)$ при всех $t \in E^1$, то $\boldsymbol{f}(t)$ есть измеримая однозначная ветвь отображения $F(t)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $F : E^1 \to \Omega(E^n)$ — измеримое многозначное отображение, $\boldsymbol{\psi}_0 \in E^n$ — фиксированный вектор. Тогда отображение $\mathcal{U}(F(t), \boldsymbol{\psi}_0)$ измеримо и, следовательно, у него существует измеримая однозначная ветвь $\boldsymbol{f}(t) \in \mathcal{U}(F(t), \boldsymbol{\psi}_0)$.*

Доказательство. Достаточно убедиться в том, что опорная функция $c(\mathcal{U}(F(t), \boldsymbol{\psi}_0), \boldsymbol{\psi})$ отображения $\mathcal{U}(F(t), \boldsymbol{\psi}_0)$ измерима. А это было показано при доказательстве теоремы 1 (см. формулу (Д.47)).

Сформулируем еще одно совсем очевидное следствие в том виде, в каком оно будет использовано далее.

Следствие 2. *Пусть многозначное отображение $F : E^1 \to \to \Omega(E^n)$ непрерывно на отрезке $I = [t_0, t_1]$. Тогда у него существует измеримая на этом отрезке однозначная ветвь $\boldsymbol{f}(t) \in F(t)$. Более того, если $\boldsymbol{\psi} \in S$ — произвольный фиксированный вектор, то существует измеримая ветвь $\boldsymbol{f}(t)$ отображения $\mathcal{U}(F(t), \boldsymbol{\psi})$, т.е. $\boldsymbol{f}(t) \in \mathcal{U}(F(t), \boldsymbol{\psi})$ при всех $t \in I$.*

Пусть $I = [t_0, t_1]$ и задано некоторое многозначное отображение $F : I \to \Omega(E^n)$.

Определение 1. *Интегралом от многозначного отображения $F(t)$ на отрезке I называется множество*

$$G = \int_{t_0}^{t_1} F(t)dt = \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(t)dt : \ \boldsymbol{f}(t) \in F(t) \right\}.$$

Здесь в правой части интеграл Лебега берется по всем однозначным ветвям отображения $F(t)$, для которых он существует. Ясно, что G является подмножеством пространства E^n.

Теорема 2 (теорема Ляпунова). *Пусть многозначное отображение $F(t)$ измеримо и удовлетворяет оценке $|F(t)| \leqslant k(t)$, где $k(t)$ — скалярная функция, интегрируемая по Лебегу на отрезке $I = [t_0, t_1]$. Тогда интеграл от этого многозначного отображения является непустым компактным множеством* *в пространстве E^n, т.е.*

$$G = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t)dt \in \Omega(E^n).$$

Более того, множество G выпукло.

Эта теорема (как теорема о векторных мерах) была впервые доказана в работе [5]. В последующих работах (см., в частности, работы [7], [8]) ее доказательство было значительно упрощено.

Докажем предварительно три леммы, при этом будем всегда считать, что выполнены предположения теоремы 2.

Лемма 1. *Множество G непусто и ограничено.*

Доказательство. Покажем, что множество G непусто. Действительно, согласно теореме 1 существует хотя бы одна измеримая ветвь $\boldsymbol{f}(t)$ у многозначного отображения $F(t)$. Далее, очевидно, имеем неравенство

$$\|\boldsymbol{f}(t)\| \leqslant |F(t)| \leqslant k(t). \tag{Д.48}$$

Таким образом, согласно свойству 2 интеграла Лебега (см. раздел Д6) любая измеримая ветвь $\boldsymbol{f}(t)$ интегрируема и $\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(t)dt \in$ $\in G$, т.е. множество G непусто. Покажем, что множество G ограничено. Действительно, пусть $\boldsymbol{g} \in G$. Тогда $\boldsymbol{g} = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(t)dt$, где $\boldsymbol{f}(t)$ — некоторая ветвь из многозначного отображения $F(t)$. В силу свойства 3 интеграла Лебега и соотношения (Д.48) имеем

$$\|\boldsymbol{g}\| = \left\| \int\limits_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(t)dt \right\| \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} \|\boldsymbol{f}(t)\|dt \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} k(t)dt = k.$$

Таким образом, $G \subset S_k(\mathbf{0})$, т.е. множество G ограничено. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для интеграла от многозначного отображения G можно определить опорную функцию*

$$c(G, \boldsymbol{\psi}) = \sup_{\boldsymbol{g} \in G} \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi} \rangle. \tag{Д.49}$$

Максимум в этом выражении всегда достигается. Более то-

го, имеет место равенство

$$c\left(\int\limits_{t_0}^{t_1} F(t)dt, \psi\right) = \int\limits_{t_0}^{t_1} c(F(t), \psi)dt. \tag{Д.50}$$

Доказательство. Заметим, что интеграл в правой части равенства (Д.50) существует, поскольку опорная функция $c(F(t), \psi)$ измерима по t и удовлетворяет оценке

$$|c(F(t), \psi)| \leqslant |F(t)| \cdot \|\psi\| \leqslant k(t)\|\psi\|.$$

Зафиксируем произвольный вектор $\psi \in E^n$. Пусть $g \in G$. Согласно определению интеграла существует измеримая однозначная ветвь $f(t) \in F(t)$ такая, что $g = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$. Согласно следствию из свойства 6 опорных функций (см. лекцию 3) имеем неравенство

$$\langle f(t), \psi\rangle \leqslant c(F(t), \psi). \tag{Д.51}$$

В силу следствия 1 из теоремы 1 у отображения $\mathcal{U}(F(t), \psi)$ существует измеримая однозначная ветвь $f^*(t)$. Согласно оценке $|F(t)| \leqslant k(t)$ эта ветвь интегрируема на отрезке I. По определению опорного множества имеем равенство

$$c(F(t), \psi) = \langle f^*(t), \psi\rangle. \tag{Д.52}$$

Таким образом, используя свойство интеграла Лебега, из формул (Д.51) и (Д.52) получаем цепочку соотношений

$$c(G, \psi) = \sup_{g\in G}\langle g, \psi\rangle = \sup_{f(t)\in F(t)} \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle f(t), \psi\rangle dt \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} c(F(t), \psi)dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle f^*(t), \psi\rangle dt \leqslant c(G, \psi).$$

Следовательно, во всех неравенствах достигается равенство, т.е. справедлива формула (Д.50), и супремум можно заменить на максимум. Этот максимум достигается в точке

$$g^* = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^*(t)dt.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $\psi \in E^n$ — произвольный фиксированный вектор. Тогда справедливо равенство*

$$\mathcal{U}(G, \psi) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{U}(F(t), \psi) dt. \tag{Д.53}$$

Доказательство. Пусть $g_0 \in \mathcal{U}(G, \psi)$. Это означает, что $g_0 \in G$ и для всех $g \in G$ выполняется неравенство

$$\langle g, \psi \rangle \leqslant \langle g_0, \psi \rangle. \tag{Д.54}$$

Для точки $g_0 \in G$ имеем представление $g_0 = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t) dt$, где $f_0(t)$ — интегрируемая ветвь отображения $F(t)$. Согласно следствию 1 из теоремы 1 у отображения $\mathcal{U}(F(t), \psi)$ существует измеримая однозначная ветвь $f^*(t)$ и для нее справедливо равенство (Д.54). Подставим точку

$$g = g^* = \int_{t_0}^{t_1} f^*(t) dt \in G$$

в неравенство (Д.54), получим тогда соотношение

$$\int_{t_0}^{t_1} c(F(t), \psi) dt = \left\langle \int_{t_0}^{t_1} f^*(t) dt, \psi \right\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \left\langle \int_{t_0}^{t_1} f_0(t) dt, \psi \right\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle f_0(t), \psi \rangle dt.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} [c(F(t), \psi) - \langle f_0(t), \psi \rangle] dt \leqslant 0,$$

при этом подынтегральная функция неотрицательна в силу включения $f_0(t) \in F(t)$. Согласно свойствам интеграла Лебега получаем равенство

$$c(F(t), \psi) - \langle f_0(t), \psi \rangle = 0 \tag{Д.55}$$

для почти всех $t \in [t_0, t_1]$, т.е. $\boldsymbol{f}_0(t) \in \mathcal{U}(F(t), \boldsymbol{\psi})$, и, следовательно, имеем включение

$$\boldsymbol{g}_0 \in \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{U}(F(t), \boldsymbol{\psi}) dt. \tag{Д.56}$$

Пусть теперь точка $\boldsymbol{g}_0$ удовлетворяет включению (Д.56). Тогда $\boldsymbol{g}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}_0(t)dt$, и ветвь $\boldsymbol{f}_0(t) \in \mathcal{U}(F(t), \boldsymbol{\psi})$ удовлетворяет равенству (Д.55). Следовательно, для произвольной точки $\boldsymbol{g} \in G$ выполняется соотношение

$$\langle \boldsymbol{g} - \boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{\psi} \rangle = \int_{t_0}^{t_1} [\langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{\psi} \rangle - c(F(t), \boldsymbol{\psi})] dt \leqslant 0,$$

так как подынтегральная функция неположительна в силу включения $\boldsymbol{f}(t) \in F(t)$, т.е. выполнено неравенство (Д.54). Таким образом, справедливо включение $\boldsymbol{g}_0 \in \mathcal{U}(G, \boldsymbol{\psi})$. Тем самым доказано равенство множеств в соотношении (Д.53).

При доказательстве теоремы 2 потребуется понятие размерности непустого множества $A \subset E^n$.

Определение 2. *Размерностью* $\dim A$ *непустого множества* A *называется размерность минимального линейного многообразия* L*, содержащего множество* A.

Так, размерность одной точки всегда равна 0, размерность любого отрезка в пространстве E^n равна 1, размерность дуги окружности на плоскости E^2 равна 2, размерность множества с непустой внутренностью в E^n всегда равна размерности пространства n. Если $\mathbf{0} \in A$, то линейное многообразие L будет подпространством. Если замкнуть множество A, то его размерность не изменится, поскольку из включения $A \subset L$ следует включение $\bar{A} \subset L$ в силу замкнутости пространства L. Если при этом взять еще выпуклую оболочку множества $\bar{A}$, то его размерность также не изменится, поскольку из включения $\bar{A} \subset L$ следует включение $\operatorname{conv} \bar{A} \subset L$ в силу выпуклости подпространства L.

Доказательство теоремы 2. По лемме 1 интеграл G является множеством непустым и ограниченным. Нам остается только доказать, что это множество замкнуто и выпукло. Отметим здесь, что при доказательстве лемм 1—3 мы нигде не пользовались замкнутостью и выпуклостью множества G. Заметим, что в лекции 5 порядок изложения результатов был другим.

При замыкании множества G его опорная функция не изменится, т.е. при всех $\psi \in E^n$ справедливо равенство

$$c(\bar{G}, \psi) = c(G, \psi). \tag{Д.57}$$

Действительно, в силу включения $G \subset \bar{G}$ всегда справедливо неравенство

$$c(G, \psi) \leqslant c(\bar{G}, \psi). \tag{Д.58}$$

С другой стороны, если $g \in \bar{G}$, то существует такая последовательность точек $g_k \in G$, которая сходится к точке g_0. Для всех точек $g_k \in G$ выполняется неравенство

$$\langle g_k, \psi \rangle \leqslant c(G, \psi).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим соотношение

$$\langle g, \psi \rangle \leqslant c(G, \psi),$$

следовательно, выполняется неравенство

$$c(\bar{G}, \psi) = \max_{g \in \bar{G}} \langle g, \psi \rangle \leqslant c(G, \psi).$$

Таким образом, получаем с учетом неравенства (Д.58) равенство (Д.57).

Поскольку при переходе от множества к его выпуклой оболочке опорная функция не изменится (см. свойство 7 опорных функций, лекция 3), из формулы (Д.57) и леммы 2 получаем равенство

$$c(\operatorname{conv} \bar{G}, \psi) = c(G, \psi) = \int_{t_0}^{t_1} c(F(t), \psi) dt. \tag{Д.59}$$

Доказательство замкнутости и выпуклости множества G будем проводить по индукции, причем индукцию будем проводить по размерности множества G, т.е. по числам $k = \dim G$.

Пусть $\dim G = 0$. Поскольку множество G непусто (лемма 1) и его размерность нуль, оно состоит из единственной точки.

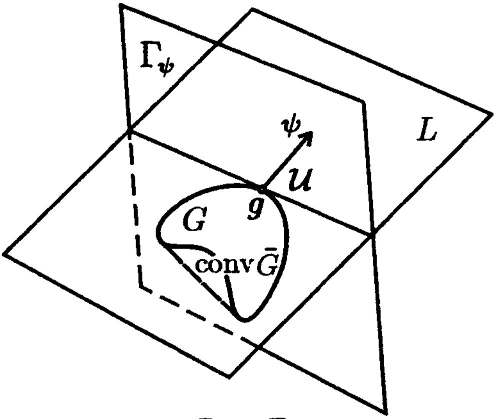


Рис. Д9

Точка является множеством замкнутым и выпуклым. Таким образом, для $k = 0$ теорема 2 доказана.

Предположим, что теорема 2 верна при $\dim G \leqslant k - 1$. Это означает, что интеграл на любом отрезке от любого измеримого многозначного отображения, ограниченного по модулю интегрируемой функцией, будет замкнутым и выпуклым, если только его размерность не превосходит $k - 1$.

Рассмотрим случай $\dim G = k$. Это означает, что множество G содержится в линейном многообразии L размерности k (рис. Д9), т.е. $G \subset L$, а следовательно, и $\mathrm{conv}\,\bar{G} \subset L$.

Без ограничения общности можно предположить, что начало координат, т.е. точка $x = 0$, принадлежит множеству $F(t)$ при всех $t \in [t_0, t_1]$, т.е.

$$0 \in F(t), \quad t \in I. \tag{Д.60}$$

Если это не так, то рассмотрим новое многозначное отображение $\widetilde{F} : I \to \Omega(E^n)$, определяемое при всех $t \in I$ равенством $\widetilde{F}(t) = F(t) - f(t)$, где $f(t)$ — некоторая фиксированная измеримая однозначная ветвь отображения $F(t)$. Такая ветвь существует по теореме 1. Тогда отображение $\widetilde{F}(t)$ уже удовлетворяет включению (Д.60), а также по-прежнему удовлетворяет предположениям теоремы 2. Действительно, его опорная функция

$$c(\widetilde{F}(t), \psi) = c(F(t), \psi) - \langle f(t), \psi \rangle$$

измерима по t и выполняется неравенство

$$|\widetilde{F}(t)| \leqslant |F(t)| + \|f(t)\| \leqslant 2|F(t)| \leqslant 2k(t),$$

где функция $2k(t)$ интегрируема на отрезке $[t_0, t_1]$. Согласно определению интеграла от многозначного отображения будет выполняться равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \widetilde{F}(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \widetilde{F}(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt,$$

т.е. интеграл G будет получаться из интеграла $\widetilde{G}$ от отображения $\widetilde{F}(t)$ сдвигом в пространстве E^n на постоянный вектор $p = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$. Ясно, что при этом свойства замкнутости и выпуклости сохраняются.

Из условия (Д.60) следует включение

$$\mathbf{0} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{0}\, dt \in G,$$

которое несколько упростит доказательство.

Возьмем произвольную точку $g \in \operatorname{conv} \bar{G}$. Если показать, что $g \in G$, то это будет означать, что интеграл G является множеством замкнутым и выпуклым. Действительно, отсюда будет следовать включение $\operatorname{conv} \bar{G} \subset G$, а обратное включение $G \subset \operatorname{conv} \bar{G}$ всегда справедливо. Возьмем произвольную точку $g \in \operatorname{conv} \bar{G}$. В силу свойств опорных функций для любого вектора $\psi \in E^n$ выполняется неравенство

$$\langle g, \psi \rangle \leqslant c(\operatorname{conv} \bar{G}, \psi). \tag{Д.61}$$

Будем рассматривать его только для векторов ψ единичной длины и лежащих в подпространстве L, т.е. $\psi \in S_L = S \cap L$. Здесь возможны два случая, которые будем рассматривать отдельно.

1. Существует вектор $\psi_0 \in S_L$ такой, что в неравенстве (Д.61) для этого вектора выполняется равенство, т.е.

$$\langle g, \psi_0 \rangle = c(\operatorname{conv} \bar{G}, \psi_0).$$

Это означает, что точка g принадлежит опорному множеству $\mathcal{U}(\operatorname{conv}\bar{G}, \psi_0)$, т.е.

$$g \in \mathcal{U}(\operatorname{conv}\bar{G}, \psi_0). \tag{Д.62}$$

Поскольку $\psi_0 \in L$, ортогональная этому вектору гиперплоскость Γ_{ψ_0} пересекается с подпространством L по линейному многообразию размерности $k-1$ (см. рис. Д9). Таким образом, из включения

$$\mathcal{U}(\operatorname{conv}\bar{G}, \psi_0) \in \Gamma_{\psi_0} \cap L$$

следует неравенство

$$\dim \mathcal{U}(\operatorname{conv}\bar{G}, \psi_0) \leqslant k-1. \tag{Д.63}$$

Всегда выполняется включение

$$\mathcal{U}(G, \psi_0) \subset \mathcal{U}(\operatorname{conv}\bar{G}, \psi_0). \tag{Д.64}$$

Действительно, если $g \in \mathcal{U}(G, \psi)$, то $g \in G$ и выполняется равенство

$$\langle g, \psi_0 \rangle = c(G, \psi_0). \tag{Д.65}$$

Следовательно, $g \in \operatorname{conv}\bar{G}$ и согласно формуле (Д.65) выполняется равенство

$$\langle g, \psi_0 \rangle = c(\operatorname{conv}\bar{G}, \psi_0).$$

Таким образом, $g \in \mathcal{U}(\operatorname{conv}\bar{G}, \psi_0)$ и включение (Д.64) справедливо. Из включения (Д.64) и неравенства (Д.63) следует, что размерность опорного множества $\mathcal{U}(G, \psi_0)$ также не превосходит $k-1$. Но согласно лемме 3 опорное можество $\mathcal{U}(G, \psi_0)$ само является интегралом от многозначного отображения $\mathcal{U}(F(t), \psi_0)$, которое измеримо (следствие теоремы 1) и ограничено по модулю интегрируемой функцией $k(t)$, поскольку выполняется неравенство

$$|\mathcal{U}(F(t), \psi_0)| \leqslant |F(t)| \leqslant k(t).$$

Таким образом, в силу предположения индукции множество $\mathcal{U}(G, \psi_0)$ замкнуто и выпукло.

Докажем теперь равенство

$$\mathcal{U}(G, \psi_0) = \mathcal{U}(\operatorname{conv}\bar{G}, \psi_0). \tag{Д.66}$$

Поскольку слева и справа в нем стоят выпуклые компактные множества, достаточно доказать, что опорные функции этих множеств совпадают (см. следствие из свойства 11 опорных функций, лекция 3). Применяя последовательно лемму 3, лемму 2 и следствие из теоремы 1 (см. раздел Д5), получаем цепочку соотношений

$$c(\mathcal{U}(G,\psi_0),\psi) = c\left(\int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{U}(F(t),\psi_0)\,dt, \psi\right) =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} c(\mathcal{U}(F(t),\psi_0),\psi)\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} c'(F(t),\psi_0;\psi)\,dt. \quad (\text{Д}.67)$$

С другой стороны, применяя еще раз следствие из теоремы 1 (см. раздел Д5), определение производной по направлению и формулу (Д.59), получаем цепочку равенств

$$c(\mathcal{U}(\operatorname{conv}\bar{G},\psi_0),\psi) = c'(\operatorname{conv}\bar{G},\psi_0;\psi) =$$
$$= \lim_{\alpha\to+0} \frac{c(\operatorname{conv}\bar{G},\psi_0+\alpha\psi) - c(\operatorname{conv}\bar{G},\psi_0)}{\alpha} =$$
$$= \lim_{\alpha\to+0} \frac{\int\limits_{t_0}^{t_1} c(F(t),\psi_0+\alpha\psi)\,dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} c(F(t),\psi_0)\,dt}{\alpha} =$$
$$= \lim_{\alpha\to+0} \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{c(F(t),\psi_0+\alpha\psi) - c(F(t),\psi_0)}{\alpha}\,dt.$$

Последовательность функций, стоящих под знаком последнего интеграла, не возрастает при $\alpha \to +0$ и ограничена снизу (см. следствие из теоремы 2, раздел Д3). Следовательно, можно поменять местами предел и интеграл и с учетом формулы (Д.67) получить выражение

$$c(\mathcal{U}(\operatorname{conv}\bar{G},\psi_0),\psi) =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \lim_{\alpha\to+0} \frac{c(F(t),\psi_0+\alpha\psi) - c(F(t),\psi_0)}{\alpha}\,dt =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} c'(F(t),\psi_0;\psi)\,dt = c(\mathcal{U}(G,\psi_0),\psi).$$

Таким образом, равенство (Д.66) доказано. Учитывая это равенство, из включения (Д.62) получаем соотношение $\boldsymbol{g} \in \mathcal{U}(G, \boldsymbol{\psi})$, следовательно, справедливо включение $\boldsymbol{g} \in G$. Первый случай доказан полностью.

2. Пусть теперь для любого вектора $\boldsymbol{\psi} \in S_L$ в формуле (Д.61) выполняется строгое неравенство, т.е.

$$\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi} \rangle < c(\operatorname{conv} \bar{G}, \boldsymbol{\psi}). \tag{Д.68}$$

Будем считать, что $\boldsymbol{g} \neq \boldsymbol{0}$, так как при $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$ включение $\boldsymbol{g} \in G$ выполняется.

Рассмотрим скалярную функцию

$$\rho(\tau) = \max_{\boldsymbol{\psi} \in S_L} \Big[\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi} \rangle - \int\limits_{t_0}^{\tau} c(F(t), \boldsymbol{\psi}) dt \Big]. \tag{Д.69}$$

Эта функция непрерывна как максимум по компактному множеству S_L непрерывных функций (см. свойства опорных функций, лекция 3). Из неравенства (Д.68) согласно формуле (Д.59) получаем, что $\rho(t_1) < 0$. Далее, при $\tau = t_0$, очевидно, имеем $\rho(t_0) = \|\boldsymbol{g}\| > 0$. Таким образом, в силу непрерывности существует значение $\tau_0 \in [t_0, t_1]$ такое, что $\rho(\tau_0) = 0$. Из определения функции $\rho(\tau)$ (Д.69) теперь следует, что существует вектор $\boldsymbol{\psi}_0 \in S_L$ такой, что выполняется равенство

$$\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi}_0 \rangle - \int\limits_{t_0}^{\tau_0} c(F(t), \boldsymbol{\psi}_0) dt = 0. \tag{Д.70}$$

Определим множество G_0 как интеграл от многозначного отображения $F(t)$ на отрезке $[t_0, \tau_0]$, т.е.

$$G_0 = \int\limits_{t_0}^{\tau_0} F(t) dt.$$

В силу предположения (Д.60) выполняется включение $G_0 \subset G$, так как, добавляя к любой точке $\int_{t_0}^{\tau_0} \boldsymbol{f}(t) dt$ из G_0 интеграл $\int_{\tau_0}^{t_1} \boldsymbol{0} dt$, получим точку из G. Следовательно, множество G_0 также лежит в подпространстве L. Используя формулу (Д.59), из соотношения (Д.70) получим равенство

$$\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\psi} \rangle = c(\operatorname{conv} \bar{G}_0, \boldsymbol{\psi}_0).$$

Применив теперь рассуждения из предыдущего пункта к интегралу G_0, заключаем, что $g \in G_0$, а следовательно, выполняется включение $g \in G$.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Задачи

1. Докажите, что если два многозначных отображения $F_1, F_2 : E^1 \to \Omega(E^n)$ измеримы, то их алгебраическая сумма $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$ будет измеримым отображением.

2. Докажите, что если многозначное отображение $F : E^1 \to \to \Omega(E^n)$ и функция $\lambda : E^1 \to E^1$ измеримы, то многозначное отображение $G(t) = \lambda(t)F(t)$ будет измеримым.

3. Докажите, что если многозначные отображения $F_k(t)$ измеримы, то их пересечение $F(t) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k(t)$, если оно непусто, будет измеримым многозначным отображением.

4. Докажите, что если многозначные отображения $F_k(t)$ измеримы, то их конечное объединение $F(t) = \bigcup\limits_{k=1}^{l} F_k(t)$ будет измеримо. Более того, если все многозначные отображения $F_k(t)$ равномерно ограничены, т.е. $|F_k(t)| \leqslant p$, то любое счетное объединение $F(t) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k(t)$ будет измеримым.

В задачах 5—8 предполагается, что все множества $F(t)$ выпуклы.

5. Пусть многозначное отображение $F : E^1 \to \operatorname{conv} \Omega(E^n)$ и функция $\boldsymbol{v} : E^1 \to E^n$ измеримы. Докажите, что существует измеримая ветвь $\boldsymbol{f}(t)$ отображения $F(t)$ такая, что при всех $t \in E^1$ выполняется условие

$$\rho(\boldsymbol{v}(t), F(t)) = \|\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{f}(t)\|.$$

6*. Докажите, что многозначное отображение $F : E^1 \to \to \operatorname{conv} \Omega(E^n)$ измеримо тогда и только тогда, когда у него существует такая счетная последовательность измеримых ветвей $\boldsymbol{f}_k(t)$, что множество $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{f}_k(t)$ всюду плотно в $F(t)$ при почти всех $t \in E^n$.

7*. Докажите, что многозначное отображение $F : E^1 \to$ $\to \operatorname{conv} \Omega(E^n)$ измеримо тогда и только тогда, когда для любого $K \in \Omega(E^n)$ множество $\{t \in E^1 : F(t) \cap K \neq \emptyset\}$ измеримо по Лебегу.

8*. Докажите, что многозначное отображение $F : E^1 \to$ $\to \operatorname{conv} \Omega(E^n)$ измеримо тогда и только тогда, когда для любого $K \in \Omega(E^n)$ множество $\{t \in E^1 : F(t) \subset K\}$ измеримо по Лебегу.

ЗАМЕЧАНИЯ

Линейная задача быстродействия исследована первоначально Р.В. Гамкрелидзе в ряде статей, и для ее решения была построена достаточно полная теория. Эти материалы вошли в классическую монографию [1], и ряд теорем и примеров, приведенных в этом учебнике, заимствован из указанной монографии.

Более общую теорию для линейной задачи быстродействия можно построить, используя аппарат многозначных отображений, что и было сделано в книге [8]. Там же приведены основные факты из теории многозначных отображений.

Удобным аппаратом для работы с множествами являются опорные функции. Некоторые их свойства можно найти в работах [2], [9].

Использование аппарата многозначных отображений и опорных функций позволяет построить достаточно стройную и законченную математическую теорию для линейной задачи быстродействия. Попытка реализовать это сделана в данной книге.

Читателям, ознакомившимся с этой книгой и желающим углубить свои познания в теории оптимального управления, для дальнейшего изучения можно рекомендовать книгу [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин, Л.С.* Математическая теория оптимальных процессов / *Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко.* М.: Наука, 1961.

2. *Рокафеллар, Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

3. *Колмогоров, А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / *А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин.* М.: Наука, 1972.

4. *Натансон, И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

5. *Ляпунов, А.А.* О вполне аддитивных вектор-функциях *I*, Изв. АН СССР. Сер. "Математика". Т. 3, N 6, 1940, с. 465 – 478.

6. *Кларк, Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.

7. *Силин, Д.Б.* Субдифференциалы выпуклых функций и интегралы от многозначных отображений. Вестник МГУ. Вычисл. мат. и кибернетика N 1, 1984, с. 55 – 59.

8. *Hermes, H., La Salle, J.P.* Functional analysis and time optimal control: Acad. Press, 1969.

9. *Благодатских, В.И.* Задача управляемости для линейных систем, Тр. МИАН СССР, 1977, Т. 143, с. 57 – 67.

СОДЕРЖАНИЕ